Zeitreihenökonometrie

Kapitel 3 – Saisonale univariate Zeitreihenmodelle

Saisonale ARMA-Prozesse

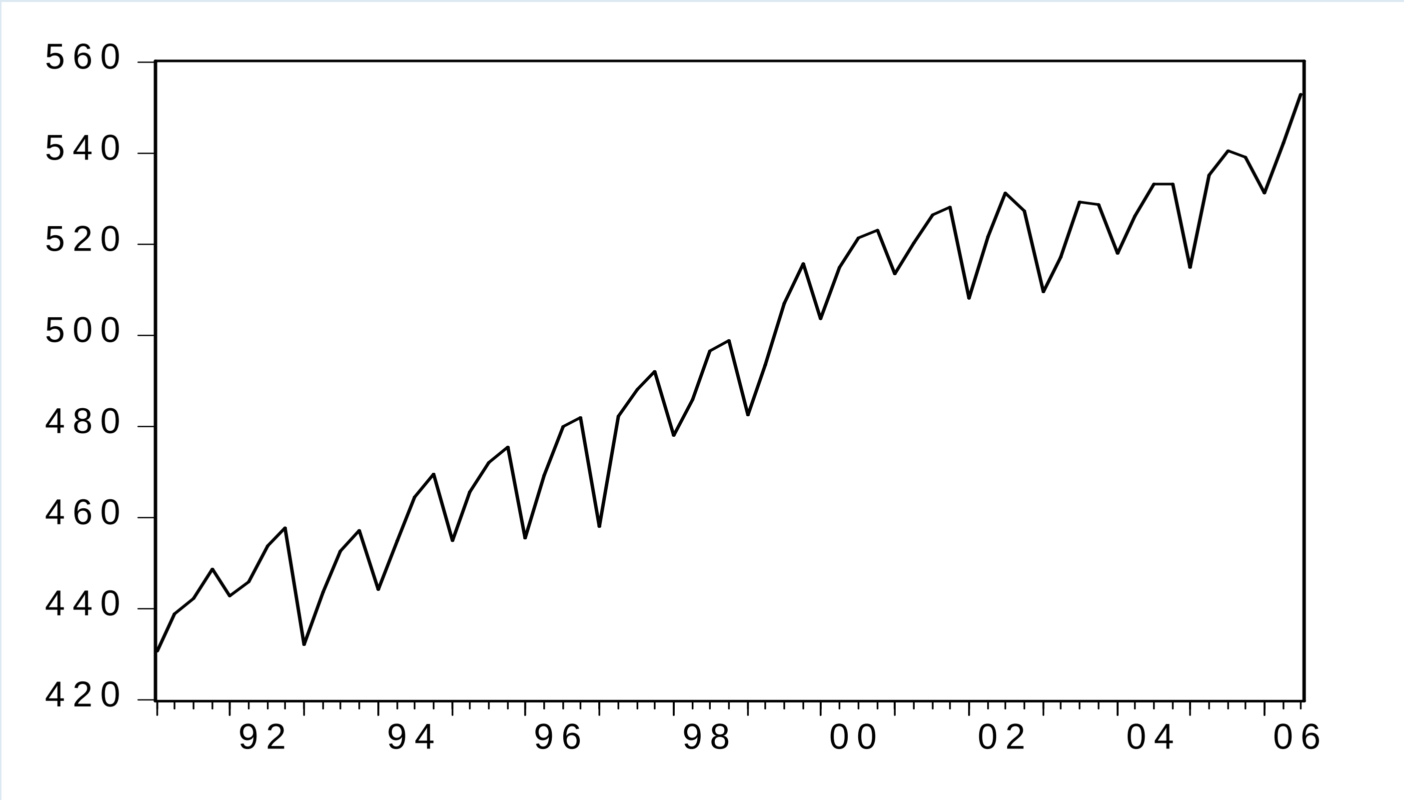
- Saisonale Effekte sind Schwankungen, die innerhalb eines Jahres ablaufen und deren Effekte sich über ein Jahr zu null summieren
- Zeitreihen, die ein saisonales Muster aufweisen, sind nichtstationär

<u>Unterscheidung zwischen einer deterministischen und stochastischen Saisonkomponente</u>

- Deterministische Saisonkomponente kann durch entsprechende (0,1) Dummies erfasst werden
- Im Folgenden wird jedoch von einer stochastischen Saisonkomponente ausgegangen. Die stochastischen Saisonkomponente wird dabei durch entsprechende Differenzenbildung und Modellierung als eigenständiger ARMA-Prozess dargestellt

Saisonale ARMA-Prozesse - Beispiel (1)

- Entwicklung des realen Bruttoinlandsproduktes in Deutschland seit 1991 (Quartalswerte)



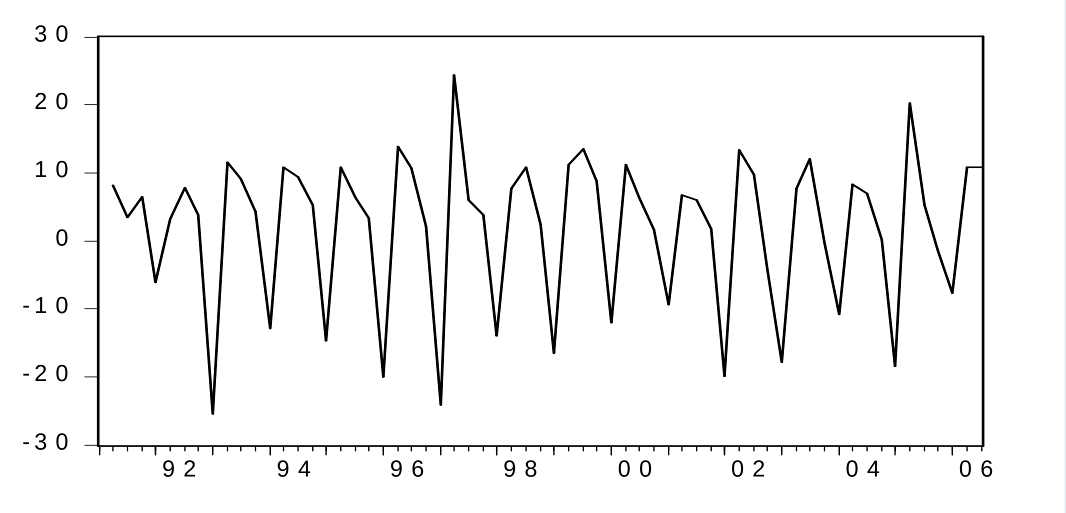
Saisonale ARMA-Prozesse - Beispiel (2)

- Zur Identifikation des stochastischen Prozesses, welcher der beobachteten Zeitreihen zu Grunde liegt müssen vorab drei Schritte vollzogen werden

- 1. Schritt: Transformation der Zeitreihe in einen stationären Prozess durch Bildung der ersten Differenzen

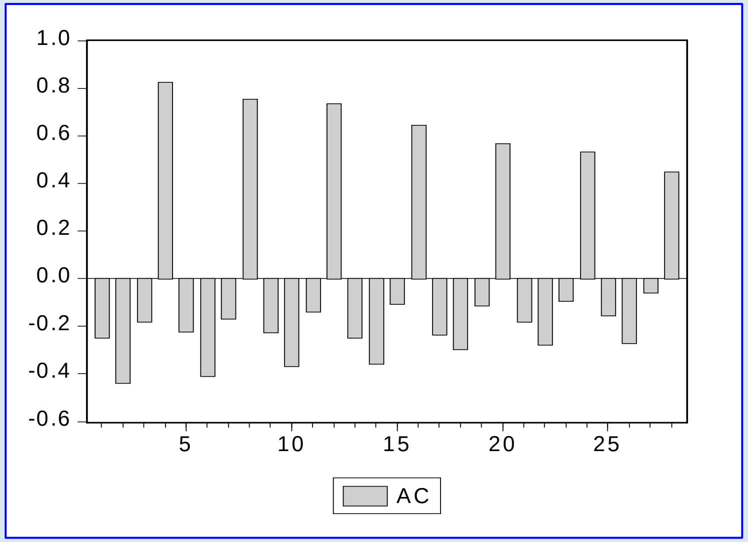
$$(1-L)Y_t = \Delta Y_t$$

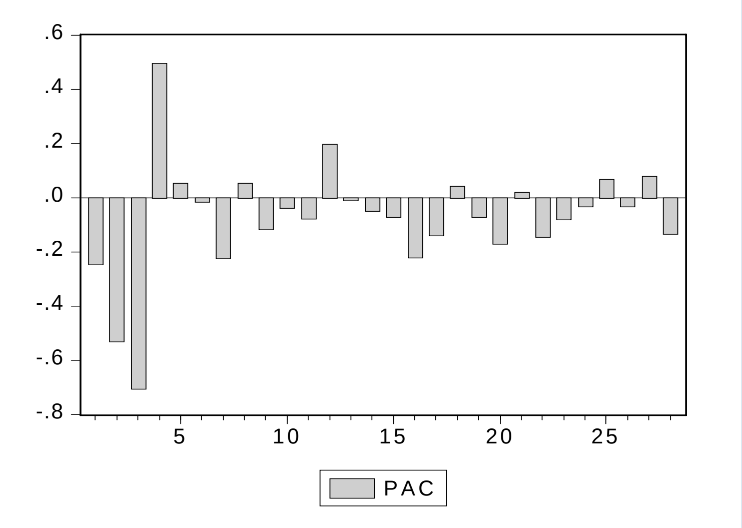
Erste Differenzen des realen BIP zeigen ausgeprägtes Sägezahnmuster (typisch für Saisonfiguren)



Saisonale ARMA-Prozesse - Beispiel (3)

- Analyse der statistischen Maße der Autokorrelationsfunktion (AC) und der partiellen Autokorrelationsfunktion (PAC) der ersten Differenzen des BIP
- Sehr große AC-Koeffizienten an den saisonalen Lags (4, 8, 12,…)
- Grund: saisonale Schwankungen reflektieren nichtstationäres Verhalten





- Koeffizienten liefern keine eigenständigen Beiträge zur Erklärung der Zeitreihe
- Eliminiert man die AC zum Lag 4, so verschwinden auch die Koeffizienten der Lags die ein Vielfaches von 4 darstellen. => saisonale Differenzenbildung

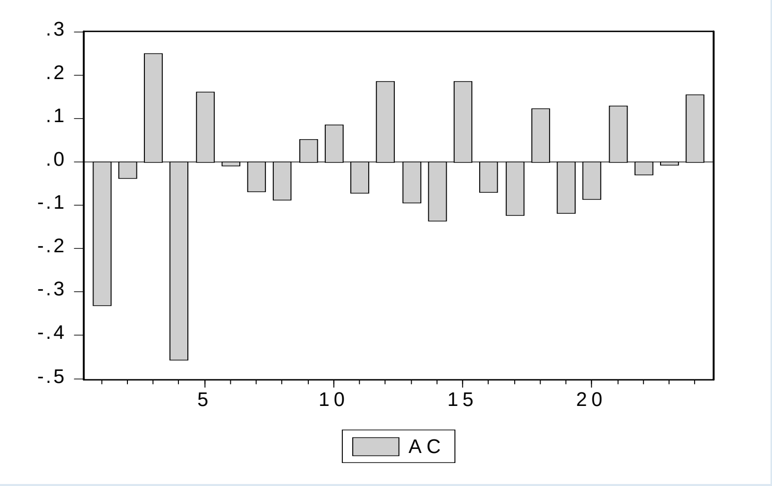
Saisonale ARMA-Prozesse - Beispiel (4)

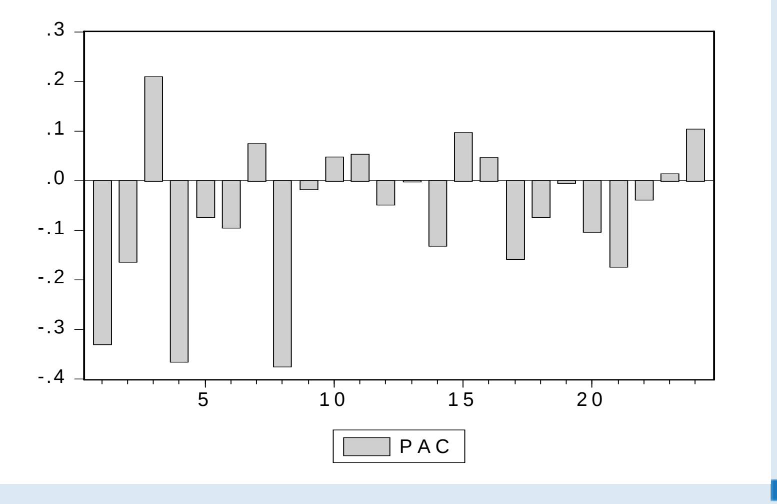
- 2. Schritt: Saisonale Differenzenbildung: Differenzenbildung gegenüber Vorjahreszeitraum

- Saisonale Differenzenbildung bedeutet, dass jeweils die Differenz gegenüber dem entsprechenden Vorjahreswert berechnet wird (hier: Vorjahresquartal)

$$\Delta\Delta_4 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-4} = (1-L)\left(1-L^4\right)Y_t$$

- ACF und PACF für die ersten und saisonalen Differenzen des realen BIP





Saisonale ARMA-Prozesse - Beispiel (5)

- Die saisonale Differenzenbildung hat die AC-Koeffizienten der Lags 4, 8, 12, … eliminiert.
- Die Betrachtung der AC und PAC lässt darauf schließen, dass keine weiteren Nichtstationäritäten in der transformierten Zeitreihe vorhanden sind
- Somit kann diese Zeitreihe als ARMA-Modell spezifiziert werden
- Unter Umständen müssen zwei ARMA-Modelle spezifiziert werden
  - ein ARMA(P,Q)- Modell für möglicherweise noch enthaltene saisonale Effekte und
  - ein ARMA(p,q)- Modell für den nichtsaisonalen Teil der Zeitreihe

Saisonale ARMA-Prozesse

3. Schritt: benachbarte Quartalswerte sind als nicht-saisonales ARMA-Modell zu beschreiben

- ARMA-Modell (saisonaler Teil) z.B. des ersten Quartals:

$$\left(1-L^4\right)Y_t=\left(1-\beta L^4\right)u_t$$

- Die Fehlerterme u_t korrespondieren zu den Daten des ersten Quartals
- Ist das unterstellte Modell das wahre Modell, dann sind die u_t, u_{t-4}, u_{t-8}, … unkorreliert
- Gilt das Modell auch für die übrigen Quartale, so gilt allgemein, dass die zu einem bestimmten Quartal gehörenden Fehlerterme unkorreliert sind.
- Aber: Benachbarte Quartalswerte der Residuen müssen nicht unkorreliert sein (z.B. u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3})
- Diese Autokorrelation wird durch ein nicht-saisonales ARMA-Modell modelliert:

$$(1-L)u_t=(1-bL)v_t$$

Saisonale ARMA-Prozesse

Nachdem das saisonale sowie das nicht-saisonale Teilmodell spezifiziert wurden, können beide Modelle zu einem multiplikativen Modell kombiniert werden

$$\left(1-L\right)\left(1-L^{4}\right)Y_t = \left(1-bL\right)\left(1-\beta L^{4}\right)v_t$$

Das Multiplikative Modell:

1. Bildung der ersten Differenzen der Ursprungszeitreihe und dann der entsprechenden Differenzen gegenüber dem Vorjahreswert (linke Seite der Gleichung).
2. Modellierung der so transformierten Zeitreihe durch zwei MA-Prozesse. Der erste Term auf der rechten Seite stellt dabei das nicht-saisonale Teilmodell dar, der zweite Term bildet das saisonale MA-Modell ab.

Saisonale ARMA-Prozesse

- Das multiplikative Modell kann dann aufgelöst werden zu:

$$Y_t = \left(1 - bL - \beta L^4 + b\beta L^5\right)\nu_t$$

- Die transformierte Ursprungsreihe wird folglich als MA(5)-Prozess modelliert