

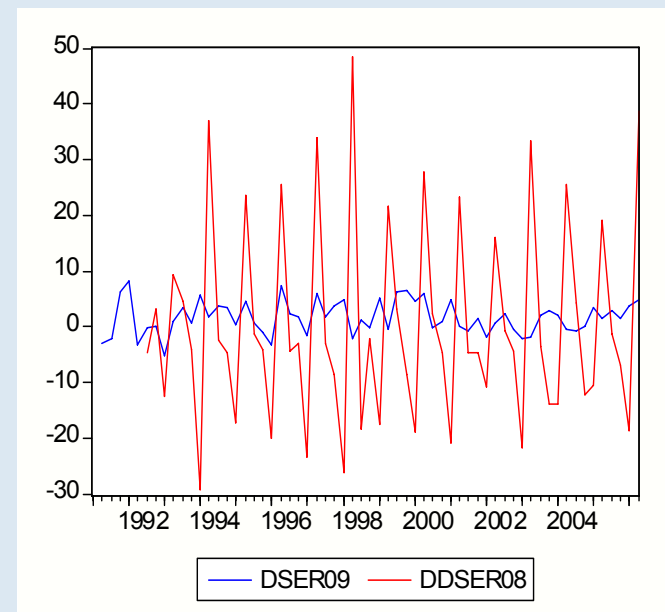
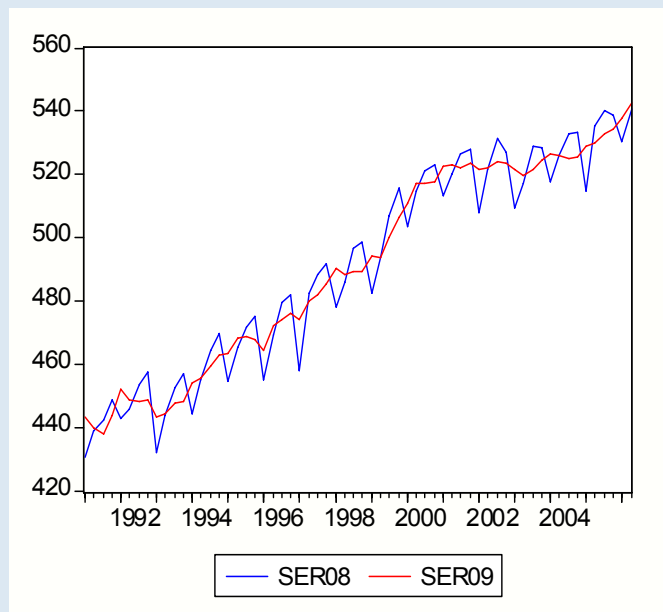
# Zeitreihenökometrie

## Kapitel 1 - Grundlagen



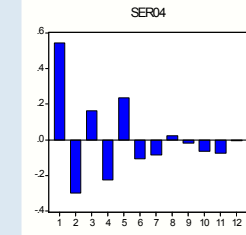
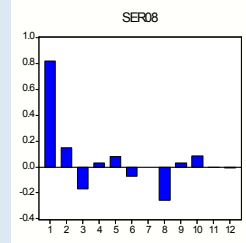
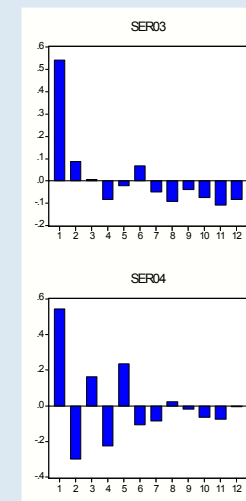
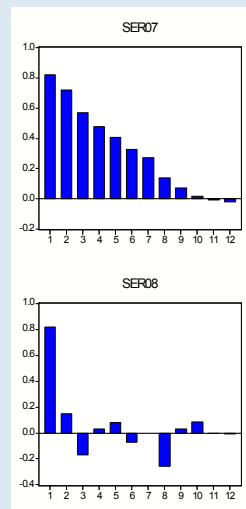
## Einführung in die Verfahren der Zeitreihenanalyse (1)

- Typischerweise beginnt man mit einer Beschreibung der jeweils zu untersuchenden Zeitreihe (graphisch)
- Trendverhalten, saisonale Schwankungen, Ausreißer werden analysiert
- Großteil der Methoden der Zeitreihenanalyse für stationäre Zeitreihen entwickelt
- Nicht stationäre Zeitreihen werden zunächst in stationäre Zeitreihen transformiert



## Einführung in die Verfahren der Zeitreihenanalyse (2)

- Die statistischen Maße der Autokorrelationsfunktion (AC) und der partiellen Autokorrelationsfunktion (PAC) können dann Aufschluss über den datenerzeugenden Prozess liefern (Identifikation), der dieser stationären Zeitreihe zu Grunde liegt
- Um auf diesen Prozess schließen zu können, ist es notwendig zu wissen, wie sich die AC und die PAC für theoretische (wahre) Prozesse verhalten
- Dieses Wissen über die theoretischen Verläufe der AC und PAC wird dann auf die tatsächlichen Verläufe der AC und PAC der zu untersuchenden Zeitreihe angewandt. So können Ähnlichkeiten zwischen theoretischen und empirischen Verläufen der AC und PAC erkannt werden.



## Einige grundlegende Begriffe der Zeitreihenanalyse (1)

- Eine Zeitreihe ist definiert als Folge von Werten die durch einen Zeitparameter  $t$  geordnet sind
- Werden die Daten zu jedem Zeitpunkt erfasst, so spricht man von einer stetigen (kontinuierlichen) Zeitreihe, z.B. Temperatur, Durchfluss von Wasser etc.
- Werden die Daten zu vorher definierten, äquidistanten Zeitpunkten erfasst, so spricht man von einer diskreten Zeitreihe, z.B. Quartalswerte des BIP
- Im weiteren werden ausschließlich diskrete, äquidistante Zeitreihen betrachtet
- Eine Zeitreihe wird definiert als eine (!) Realisation eines stochastischen Prozesses
- Ein stochastischer Prozess  $Y_t$  ist ein Zufallsprozess, der zu jedem Zeitpunkt einen beliebigen Wert zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  annehmen kann. Der zu einem Zeitpunkt  $t$  beobachtete Wert  $y_t$  ist eine (!) Realisation dieses stochastischen Prozesses

## Einige grundlegende Begriffe der Zeitreihenanalyse (2)

- $Y_t$  ist somit als Zufallsvariable (ZV) zu verstehen, die einer bestimmten Verteilung  $F_Y$  folgt, die aber im allgemeinen unbekannt ist.
- Da lediglich eine Realisation der ZV beobachtbar ist, kann man nicht auf deren Verteilung schließen und somit auch nicht die verschiedenen Momente der ZV wie Erwartungswert und Varianz ermitteln.
- Eine größere Anzahl an Realisationen einer einzelnen ZV könnten nur mittels Experimenten generiert werden. In der realen Welt sind Experimente allerdings nicht durchführbar.
- Um dennoch statistische Verfahren anwenden zu können, wird eine Zeitreihe als Folge von ZV definiert, die bestimmte Eigenschaften erfüllen muss.
- Diese Eigenschaften beziehen sich auf die zeitliche Entwicklung der Momente (Erwartungswert, Varianz, Autokovarianz).

## Stationarität einer Zeitreihe

- Generell: der Erwartungswert sowie die Varianz und die Kovarianz einer Zeitreihe  $Y_t$  können zu jedem Zeitpunkt  $t$  verschieden sein

Es gilt:

$$E(Y_t) = \mu_t$$

$$\text{VAR}(Y_t) = E(Y_t - \mu_t)^2 = \sigma_t$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-j}) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-j} - \mu_{t-j})]$$

- Ein stochastischer Prozess wird als schwach stationär\* bezeichnet, wenn der Mittelwert und die Varianz zeitunabhängig sind und die Kovarianz lediglich vom zeitlichen Abstand  $j$  zwischen den beiden Punkten abhängt, nicht jedoch vom Zeitpunkt  $t$  an dem sie gemessen wird.

Es gilt:

$$E(Y_t) = \mu$$

$$\text{VAR}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2 = \Gamma_0$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-j}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] = \Gamma_j$$

\* Die Bedingungen für einen schwach stationären Prozess beziehen sich auf dessen Momente. Streng stationäre Prozesse weisen demgegenüber zu jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung auf.

# Datentransformationen (1)

Um die Verfahren der Zeitreihenanalyse auch auf nichtstationäre Zeitreihen anwenden zu können, müssen diese vorher in stationäre Reihen transformiert werden.

## 1. Fall: Zeitreihe nicht mittelwertstationär => Trendverhalten

Die Ausgangszeitreihe wird dann so lange einer Differenzenbildung unterworfen bis die transformierte Reihe mittelwertstationär ist.

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} + Y_{t-2} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Wird eine Zeitreihe insgesamt d-mal der Differenzenbildung unterzogen, schreibt man:

$$\Delta^d Y_t$$

In der praktischen Anwendung wird die Ordnung d des Differenzenoperators zumeist über sog. Einheitswurzeltests (unit root test) bestimmt. (=> siehe Kapitel zur Kointegration)

## Datentransformationen (2)

### 2. Fall: Zeitreihe nicht varianzstationär => Varianz wächst mit Verlauf

Eine zeitabhängige Varianz ist zumeist nur schwer zu modellieren, wenn keine expliziten Gründe für das Verhalten bekannt sind. Die Box-Cox Transformation stellt ein statistisches Verfahren dar, die Varianz einer Zeitreihe zu stabilisieren. Wird mit  $X_t$  die transformierte Zeitreihe bezeichnet, so lautet die Box-Cox Transformation:

$$X_t = \begin{cases} (Y_t^\theta - 1)\theta^{-1} & \text{für } 0 < \theta < 1 \\ \log(Y_t) & \text{für } \theta = 1 \end{cases}$$

Der Parameter  $\theta$  muss in der praktischen Anwendung dann so bestimmt werden, so dass die Varianz der Zeitreihe  $X_t$  möglichst konstant ist.

## Lag-Operator L

- Wendet man den Lag-Operator auf eine Zeitreihe zum Zeitpunkt t an, so verschiebt er die Zeitreihe um eine Zeiteinheit:

$$LY_t = Y_{t-1}$$

- Dementsprechend verschiebt der Operator  $L^2$  die Zeitreihe um zwei Zeiteinheiten:

$$L^2Y_t = Y_{t-2}$$

- Allgemein gilt:

$$L^kY_t = Y_{t-k}$$

- Analog verschiebt der Operator  $L^{-1}$  die Zeitreihe um eine Einheit in die Zukunft. Allgemein gilt:

$$L^{-k}Y_t = Y_{t+k}$$

## Wichtige statistische Kenngrößen stochastischer Prozesse

Bezeichnung	Theoretischer Wert	Empirischer Wert
Erwartungswert	$E(Y_t) = \mu$	$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t$
Varianz	$\text{Var}(Y_t) = \Gamma_0$ $= E(Y_t - E(Y_t))^2 = \sigma^2$	$c_0 = s^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2$
Autokovarianz	$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-j}) = \Gamma_j$ $= E((Y_t - E(Y_t))(Y_{t-j} - E(Y_{t-j})))$	$c_j = s^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-j} - \bar{Y})$
Autokorrelation	$\rho_j = \Gamma_j \Gamma_0^{-1}$	$\tau_j = c_j c_0^{-1}$

## Autokovarianz und Autokorrelation (1)

- In der Zeitreihenanalyse sind die Autokovarianz und die Autokorrelation Maßzahlen des linearen Zusammenhangs zwischen ZVen mit einem bestimmten Zeitabstand  $j$ .
- Werden sie für verschiedenen Werte von  $j$  berechnet, so spricht man auch von Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion.
- Während die Autokovarianz von der Dimension abhängt, in der die Variablen gemessen sind, ist die Autokorrelation eine dimensionslose Größe.
- Mit steigender Anzahl von Lags ( $j$ ) nimmt die Anzahl der Summanden zur Berechnung bzw. Schätzung der Autokovarianz eines stationären Prozesses endlicher Größe ab.
- Dies impliziert, dass insbesondere AC zu hohen Lags nur sehr ungenau geschätzt werden können und oft ein erratisches Verhalten zeigen.

## Autokovarianz und Autokorrelation (2)

- Die einzelnen Autokorrelationskoeffizienten nehmen zumeist Werte nahe Null an.
- Um Aussagen darüber treffen zu können, ob einzelne AC-Koeffizienten statistisch gesichert von Null verschieden liegen, müsste ein formaler Test durchgeführt werden.
- Da jedoch einzelne AC-Koeffizienten nicht unabhängig voneinander sind, können derartige Testverfahren zu falschen Schlussfolgerungen führen.
- Aus diesem Grund betrachtet man in der angewandten Zeitreihenanalyse eine Gesamtgröße und entscheidet anhand dieser Teststatistik, ob die zu Grunde liegende Zeitreihe eine systematische Struktur aufweist oder als White Noise bezeichnet werden kann.

## Autokovarianz und Autokorrelation (3)

- Die Q-Statistik oder Ljung-Box Q-Test bzw. Portmanteau Statistik berechnet sich nach:

$$Q^* = N(N+2) \sum_{j=1}^K r^2(j)(N-j)^{-1} \quad \chi^2\text{-verteilt mit } (K-1) \text{ Freiheitsgraden}$$

- N entspricht der Anzahl der Beobachtungen des Prozesses.
- $r(j)$  bezeichnet den AC-Koeffizienten zum Lag  $j$  und  $K$  gibt die Anzahl der AC-Koeffizienten an. ( $K$  sollte in etwa 20% des Stichprobenumfangs betragen)
- Sind die Werte von  $Q^*$  größer als die kritischen Werte, dann wird die Hypothese, dass die Zeitreihe einem White Noise Prozess folgt und somit keine Korrelationen zwischen den Realisationen der Zeitreihe existieren, verworfen.

## Partielle Autokorrelation PAC (1)

- Eine weitere wichtige Funktion zur Charakterisierung schwach stationärer stochastischer Prozesse ist die partielle Autokorrelationsfunktion.
- Der partielle Autokorrelationskoeffizient gibt an, welchen Beitrag ein neu hinzugefügter Regressor zur Erklärung der Varianz liefert, wenn für die bereits bestehende Korrelation durch die zuvor berücksichtigten Variablen Rechnung getragen wird.
- Enthält eine Gleichung lediglich eine erklärende Variable, so stimmt der AC-Koeffizient und der PAC-Koeffizient überein. Es macht hier keinen Sinn auf den zusätzlichen Einfluss dieser Variablen zu testen. Für einen Zeitabstand von  $j = 1$  zeigen AC und PAC somit den gleichen Wert.

## Partielle Autokorrelation PAC (2)

- Treten jedoch mehrere Regressoren auf, so kann z.B. der zusätzliche Beitrag von  $Y_{t-3}$  zur Erklärung von  $Y_t$  ermittelt werden, wenn für die bereits vorhandene Erklärung durch  $Y_{t-1}$  und  $Y_{t-2}$  kontrolliert wird.

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3}$$

- Definition:  
Die partielle Autokorrelation  $\pi_j$  ist die partielle Korrelation von  $Y_{t-j}$  und  $Y_t$  unter Konstanthaltung der dazwischen liegenden Zufallsvariablen.

## Partielle Autokorrelation PAC (3)

- Allgemein lautet die Formel für die Berechnung der partiellen Autokorrelationskoeffizienten:

$$\pi_j = \begin{cases} \rho_1 & \text{für } j = 1 \\ \frac{\rho_j - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_{j-1,i} \rho_{j-i}}{1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_{j-1,i} \rho_{j-i}} & \text{für } j > 1 \end{cases}$$

- Es gilt dabei:  $\pi_0 = 1$ ,  $\pi_1 = \rho_1$  und  $\pi_{-j} = \pi_j$
- Für die empirische Berechnung der PAC-Koeffizienten werden die theoretischen Werte durch ihre entsprechenden Stichprobenwerte ersetzt
- Zusammen mit der AC-Funktion dient die PAC-Funktion zur Identifikation sowohl der Art als auch der Ordnung des stochastischen Prozesses, welcher der betrachteten Zeitreihe zu Grunde liegt