Zeitreihenökonometrie

Kapitel 9 – Kointegration

Scheinregression (Spurious Regression)

Granger und Newbold (1974) simulierten 100 unabhängige random walk Prozesse und führten die dazugehörigen Regressionen durch. Bei Annahme einer Irrtumwahrscheinlichkeit von 5% wird erwartet, dass in 95 Fällen der Regressionskoeffizient nicht signifikant von Null verschieden ist. Es besteht dann kein linearer Zusammenhang zwischen den Prozessen.

Überraschenderweise beobachteten sie in ca. 75 % der Regressionen einen signifikanten Wert des Regressionskoeffizienten.

Random Walk 1 $$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{y,t}$$

Random Walk 2 $$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{x,t}$$

Regression $$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

Die Verwendung von trendbehafteten Zeitreihen in der Regressionsanalyse birgt die Gefahr, auf signifikante Zusammenhänge zu schließen, obwohl tatsächlich kein Zusammenhang existiert.

Idee der Kointegrationsanalyse

Die Kointegrationsanalyse unterscheidet zwischen

- der Langfristbeziehung ökonomischer Variablen (Orientierung an einem ökonomischen Modell bzw. an der ökonomischen Theorie)
- und der Kurzfristdynamik dieser Variablen (Orientierung an der Zeitreihenanalyse, theoriefrei aber statistisch-methodisch abgesichert)

Es werden die Vorteile beider Ansätze miteinander kombiniert. Die Kointegrationsanalyse ermöglicht die Analyse der Beziehungen nicht-stationärer Variablen, ohne dabei

- Gravierende Annahmeverletzungen des Regressionsmodells in Kauf zu nehmen
- Auf relevante Information zu verzichten bzw. Information zu vernichten

Problem: Die kurzfristigen dynamischen Prozesse überlagern (bzw. überdecken sogar) häufig die langfristigen Zusammenhänge zwischen den Variablen bei kurzfristiger Betrachtungsweise.

Idee der Kointegrationsanalyse

Problem der beiden Analysemethoden:

- Ein Nachteil der klassischen Ökonometrie ist häufig die Nicht-Berücksichtigung der Zeitreiheneigenschaften der Variablen. Eine auftretende Nicht-Stationarität kann in Regressionsverfahren zu verzerrten und nicht interpretierbaren Ergebnissen führen.

  Ein Großteil makroökonomisch relevanter Variablen zeigen einen nicht-stationären Verlauf.

- Die Zeitreihenanalyse berücksichtigt die Zeitreiheneigenschaften der Variablen und beseitigt auftretende Nicht-Stationaritäten durch eine geeignete Filterung, z.B. Differenzenbildung. Durch die Filterung wird jedoch genau der Teil in den Daten vernichtet, welcher Information bezüglich der langfristigen Zusammenhänge zwischen den Variablen enthält.

  Die Regression in Differenzen impliziert, dass sich die Niveauwerte der Variablen beliebig weit voneinander entfernen können. In der Praxis existiert jedoch häufig eine langfristige ökonomische Gleichgewichtsbeziehung. Die Zeitreihen sind zwar individuell nicht-statonär, jedoch existiert eine Linearkombination die stationären Charakter hat.

=> Die Kointegrationsanalyse kombiniert die Vorteile beider Ansätze !!

Grundlagen der Kointegrationsananalyse

Charakterisierung von I(0)-Prozessen:

konstanter Mittelwert (bei Modellen ohne deterministischen Trend), konstante Varianz; Mittelwert wird oft geschnitten, es existiert ein **„Attraktor“**, d.h. eine Kraft, die den Prozess in Richtung auf einen Normalwert zieht; der Prozess hat ein kurzes Gedächtnis; Zeitreihe fluktuiert stark

Charakterisierung von I(1)-Prozessen:

mit steigendem Stichprobenumfang wachsende Varianz; ein gegebener Anfangswert wird relativ selten wieder erreicht (möglicherweise nie wieder); es existiert kein **Attraktor**; der Prozess hat ein (unendlich) langes Gedächtnis; Zeitreihe ist relativ glatt

Grundlagen der Kointegrationsanalyse

Kombinationsregeln für I(0) und I(1)-Prozesse:

Es seien a und b nicht stochastische Parameter. Dann gelten folgende Regeln:

$$(a) \qquad x_t \sim I(0) \;\Rightarrow\; a + bx_t \sim I(0)$$

$$x_t \sim I(1) \;\Rightarrow\; a + bx_t \sim I(1)$$

$$(b) \qquad x_t \sim I(0)$$

$$y_t \sim I(0) \;\Rightarrow\; ax_t + by_t \sim I(0)$$

$$(c) \qquad x_t \sim I(1)$$

$$y_t \sim I(0) \;\Rightarrow\; ax_t + by_t \sim I(1)$$

$$(c) \qquad x_t \sim I(1)$$

$$y_t \sim I(1) \;\Rightarrow\; ax_t + by_t \sim I(1) \qquad \text{"fast immer"}$$

Beide Prozesse werden von stochastischen Prozessen gesteuert,
die völlig unabhängig voneinander sind.

Grundlagen der Kointegrationsanalyse

- Linearkombinationen integrierter Prozesse können in bestimmten Fällen einen niedrigeren Integrationsgrad aufweisen als die Ausgangszeitreihen

  ➡ **Kointegration**

- Beispiel:
- Es gelte $w_t \sim I(1),\ \tilde{x}_t \sim I(0)$ und $\tilde{y}_t \sim I(0)$ sowie

$$x_t = aw_t + \tilde{x}_t \qquad (1)$$

$$y_t = w_t + \tilde{y}_t \qquad (2)$$

- Offensichtlich sind x_t und y_t I(1)- Prozesse
- Die Variable $z_t := x_t - ay_t = \tilde{x}_t - a\tilde{y}_t$ ist aber I(0)
- Im Beispiel ist der den Variablen x_t und y_t gemeinsame Faktor w_t verantwortlich für deren I(1)-Eigenschaft
- Durch die Differenzenbildung $x_t - ay_t$ fällt dieser Faktor heraus

- Es existiert eine stationäre Linearkombination

Grundlagen der Kointegrationsanalyse

Allgemeine Definition:

Es sei y_t ein n-dimensionaler Spaltenvektor, dessen Komponenten alle I(k) sind. Existiert ein gleichdimensionierter Spaltenvektor $\lambda \neq 0$, so dass der Skalar $z_t = \lambda' y_t \sim I(k-b)$, so heißen die Komponenten von y_t **kointegriert vom Grade *k, b* oder KI(*k,b*)** und λ ist der **Kointegrationsvektor**.

- im ökonometrischen Kontext lässt sich $\lambda' y_t$ als langfristige Gleichgewichtsbeziehung zwischen den im Vektor y_t enthaltenen Variablen deuten, und z_t gibt die Abweichung von diesem Gleichgewicht an **=> diese Abweichung wird im Modell berücksichtigt**

Vector Error Correction Model (VECM)

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \ldots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\underbrace{\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)}}_{\text{stationär}} + \Pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

stationär → muss stationär sein

$$\Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^{p} A_j$$

$$\Pi = A_1 + A_2 + \ldots + A_p + I$$

Πy_{t-1} sind n Linearkombinationen der Variablen $y_1, \ldots, y_n$

Vector Error Correction Model (VECM)

Beispiel: p = 2

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad \Big| + A_2 y_{t-1} - A_2 y_{t-1}$$

$$y_t = A_1 y_{t-1} - A_2 \left(y_{t-1} - y_{t-2} \right) + A_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \left(A_1 + A_2 \right) y_{t-1} - A_2 \left(y_{t-1} - y_{t-2} \right) + \varepsilon_t \qquad \Big| - y_{t-1}$$

$$\Delta y_t = \left(A_1 + A_2 - I \right) y_{t-1} - A_2 \left(y_{t-1} - y_{t-2} \right) + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} - A_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Vector Error Correction Model (VECM)

Wenn n unabhängige Linearkombinationen von $y_1, \ldots, y_n$ stationär sind, dann ist jeder der Variablen stationär.

Beweis:

$$v_t = \Pi y_{t-1}$$

Π ist eine (n x n) Matrix mit vollem Rang

v_t ist ein (n x 1) Vektor von stationären Variablen

$y_{t-1} = \Pi^{-1} v_t$ Jede Variable in y_t kann als Linearkombination stationärer Variablen dargestellt werden und ist somit auch stationär.

Vector Error Correction Model (VECM)

Fallunterscheidung für Π

1.) $rg\left(\Pi\right) = n$

Alle Variablen in y_t sind stationär. => Schätzung des VAR-Systems in Niveauwerten

2.) $\Pi = 0 \qquad rg\left(\Pi\right) = 0$

Schätzung des VAR-Systems in Niveauwerten vernachlässigt die Restriktion

$\Pi = A_1 + A_2 + \ldots + A_p + I = 0.$

=> Schätzung des VAR-Systems in ersten Differenzen der Variablen.

3.) $0 < rg\left(\Pi\right) = k < n$

Vector Error Correction Model (VECM)

Fallunterscheidung für Π

3.) $0 < rg(\Pi) = k < n$

Es gibt (n x k) Matrizen α und β mit jeweils vollem Spaltenrang k für die gilt

$$\alpha\beta' = \Pi$$

Wenn Πy_t stationär ist, so ist auch $\beta' y_t$ stationär.

Es gibt folglich k linear unabhängige Linearkombinationen der Variablen in y_t die stationär sind.

Die k Spaltenvektoren der Matrix β werden Kointegrationsvektoren genannt und die Variablen in y_t sind kointegriert vom Rank k.

$$\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)} + \alpha\beta' y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Vector Error Correction Model (VECM)

$$\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)} + \alpha \beta' y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Der Term $v_t = \beta' y_{t-1}$ stellt die stationäre Abweichung des Systems vom langfristigen Gleichgewichtswert $E\left(v_t\right) = 0$ dar.

Vector Error Correction Model (VECM)

Vorgehensweise:

1. Schritt: Schätzung der Anzahl der Kointegrationsbeziehungen über den Rang von Π
   (z.B. Johansen Verfahren)

2. Schätzung des Kointegrationsvektors β

3. Schätzung der Parametermatrizen des Fehlerkorrekturmodells

$$\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)} + \alpha\beta' y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ablauf der Kointegrationsanalyse

1. Im ersten Schritt testet die Kointegrationsanalyse, ob eine Langfristbeziehung zwischen den Variablen im betrachteten Datensample existiert bzw. nachgewiesen werden kann.
2. Kann die Existenz bestätigt werden, so wird die Langfristbeziehung geschätzt und kann dann mit den theoretischen Vorstellungen verglichen werden.
3. Die kurzfristige Modelldynamik ist von einer Vielzahl von Einflüssen wie Anpassungsverhalten, institutionelle Gegebenheiten, Informationsmängel etc. abhängig und kann deshalb nicht über die ökonomische Theorie erklärt werden. Die Modellierung der Kurzfristdynamik wird deshalb von den Verfahren der Zeitreihenanalyse übernommen.
4. Die resultierende Schätzgleichung bildet dann sowohl die geschätzte Langfristbeziehung als auch die kurzfristigen Dynamiken des Systems ab.

Wichtig: Kointegrationsanalyse nur sinnvoll, wenn die betrachteten Variablen nicht-stationären Charakter aufweisen. Sind die Variablen stationär, so gilt die Anwendung der einfachen Regressionsanalyse als unproblematisch.

Engle-Granger Test auf Kointegration: Annahme einer Kointegrationsbeziehung

Stufe 1: Integrationstests für die Variablen

- Kointegrationsbeziehung kann nur dann bestehen, wenn die betrachteten Variablen den gleichen Integrationsgrad aufweisen.
- Um den Integrationsgrad der Variablen zu bestimmen, kann der Augmented Dickey-Fuller Test (ADF Test) verwendet werden

Stufe 2: Schätzung des Langfristzusammenhangs

- Falls die betrachteten Variablen tatsächlich integriert von der Ordnung 1 sind, lässt sich untersuchen, ob ein Langfristzusammenhang zwischen den Variablen besteht
- Für die Schätzung des Langfristzusammenhanges wird eine statische Regression der Niveauvariablen herangezogen:

$$y_{1,t} = \beta_2 y_{2,t} + \beta_3 y_{3,t} + \ldots + \beta_n y_{n,t} v_t$$

Engle-Granger Test auf Kointegration: Annahme einer Kointegrationsbeziehung

Stufe 2: Schätzung des Langfristzusammenhangs

Dabei können β_1 und $y_{2,t}$ Vektoren sein.

In der Schätzgleichung $y_{1,t} = \hat{\beta}_2 y_{2,t} + \ldots + \hat{\beta}_n y_{n,t} + \hat{v}_t$ beschreiben

$\hat{v}_t$ die empirischen Residuen

$\hat{\beta}_1$ den empirischen Kointegrationsvektor mit folgenden Eigenschaften:

- der Vektor ist *superkonsistent*, d.h. er konvergiert schneller zum wahren Wert als bei stationären Variablen
- der Vektor ist auch asymptotisch nicht normal- oder t-verteilt
- der Vektor kann in kleinen Stichproben stark verzerrt sein
- der Vektor ist *inkonsistent* wenn keine Kointegration vorliegt (Scheinregression)

Engle-Granger Test auf Kointegration

Stufe 3: Test auf Kointegration

- Falls Kointegration vorliegt, dürfte in den Residuen $\hat{v}_t$ (Abweichungen vom langfristigen Gleichgewicht) der statischen Regression keine Einheitswurzel mehr auftreten, d.h. die Abweichungen vom Langfristzusammenhang zwischen den betrachteten Variablen sollten stationär sein.
- Die Nullhypothese der Testgleichung lautet auf Nicht-Stationarität, also auf das Fehlen von Kointegration.

$$\hat{v}_t = \varphi_0 \hat{v}_{t-1} + \sum_i \varphi_i \hat{v}_{t-i} + \eta_t$$

- die Testgröße berechnet sich als $\dfrac{\hat{\varphi}_0 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}_0}}$
- H_0 wird abgelehnt, sobald die Teststatistik kleiner ist als der kritische Wert.
- Die kritischen Werte unterscheiden sich jedoch von den gewöhnlichen ADF-Werten, da die untersuchte Zeitreihe eine geschätzte Variable ist, und somit zusätzlich Unsicherheit enthält. Zudem hängen sie von der Anzahl der verwendeten Variablen sowie von der Berücksichtigung deterministischer Komponenten (Konstante, Trend) ab.

Engle-Granger Test auf Kointegration

Stufe 4: Ein Fehlerkorrekturmodell zur Modellierung der kurzfristigen Anpassungsdynamik (Error Correction-Modell)

- Spezifikation eines Fehlerkorrekturmodells (ECM)
- Der Kointegrationsvektor wird der statischen Regressionsgleichung entnommen

$$y_{1,t} = \hat{\beta}_2 y_{2,t} + \ldots + \hat{\beta}_n y_{n,t} + \hat{v}_t$$

$$\hat{v}_t = y_{1,t} - \hat{\beta}_2 y_{2,t} - \ldots - \hat{\beta}_n y_{n,t}$$

$$\hat{\beta} = \left(1 - \hat{\beta}_2 - \ldots - \hat{\beta}_n\right)'$$

- Das zu schätzende ECM lautet:

$$\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)} + \alpha\beta' y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Engle-Granger Test auf Kointegration

Stufe 4: Ein Fehlerkorrekturmodell zur Modellierung der kurzfristigen Anpassungsdynamik (Error Correction-Modell)

$$\triangle y_t = \Gamma_1 \triangle y_{t-1} + \Gamma_2 \triangle y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p \triangle y_{t-(p-1)} + \alpha \beta' y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Fehler-Korrektur Term

- Der geschätzte Koeffizient α des Fehlerkorrekturterms sollte signifikant von Null verschieden sein (und ein negatives Vorzeichen aufweisen)
- α ist darüber hinaus ein Maß für Anpassungsgeschwindigkeit, je größer er betragsmäßig ist um so schneller konvergiert y_t gegen sein langfristiges Gleichgewicht

γ_2