

# Zeitreihenökonomie

## Kapitel 8 – Impuls-Antwort-Funktionen



## Interpretation eines VAR-Prozesses

- Fall eines bivariaten Var(p)-Prozess mit 2 Variablen und ohne Konstante

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p & \alpha_{12}^p \\ \alpha_{21}^p & \alpha_{22}^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- Wir wollen die Spur eines konkreten Impulses, den wir uns als exogen verursachte Störung vorstellen können, im System verfolgen
- Wegen der wechselseitigen Abhängigkeiten zwischen den betrachteten Variablen lässt sich die dynamische Reaktion des Systems nicht unmittelbar aus den Schätzkoeffizienten ablesen
- In unserem Beispiel bedeutet dies, dass die Werte der einzelnen Koeffizienten  $\alpha_{ij}^n$  nicht zu interpretieren sind
- Aufgrund der wechselseitigen Abhängigkeiten im System kann von einem positiven Wert von  $\alpha_{12}^2$  nicht geschlossen werden, dass eine Erhöhung von  $y_2$  in der vorletzten Periode den heutigen Wert von  $y_{12}$  erhöht
- Impuls-Antwort-Folgen sind eine Methode, um die in den geschätzten Koeffizienten des VAR-Modells enthaltene Information über die dynamische Anpassung der Variablen zu veranschaulichen

## Impuls-Antwort-Funktionen

- Impuls-Antwort-Funktionen zeigen, wie sich Schocks in einer Variablen im geschätzten System auf künftige Werte dieser und der anderen Variablen auswirken

- Beispiel: bivariates VAR(1)-Modell:

$$y_{1,t} = \alpha_{11}y_{1,t-1} + \alpha_{12}y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \alpha_{21}y_{1,t-1} + \alpha_{22}y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

- Auswirkung eines Impuls der Variable 1 in Periode t:  $\Rightarrow \varepsilon_{1,t}$   
(Annahme: Störgrößen sind kontemporär unkorreliert)

Periode	$y_{1t}$	$y_{2t}$
1	$\varepsilon_{11}$	0
2	$\alpha_{11}\varepsilon_{11}$	$\alpha_{21}\varepsilon_{11}$
3	$\alpha_{11}^2\varepsilon_{11} + \alpha_{12}\alpha_{21}\varepsilon_{11}$	$\alpha_{22}\alpha_{21}\varepsilon_{11} + \alpha_{21}\alpha_{11}\varepsilon_{11}$
4	...	...

# Impuls-Antwort-Funktionen

## Beispiel: bivariates VAR(1)-System

$$y_{1,t} = \alpha_{11}y_{1,t-1} + \alpha_{12}y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \alpha_{21}y_{1,t-1} + \alpha_{22}y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Es sei die Koeffizientenmatrix:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- Eine Impuls der Größe Eins für  $y_1$  in Periode  $t = 0$  lässt sich darstellen als  $\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}'$
- Für die einzelnen Perioden ergeben sich folgende Auswirkungen:

$$\begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,23 \\ -0,22 \end{pmatrix}$$

Keine AR- oder MA-Darstellung  
=> Rein zur Veranschaulichung

## Impuls-Antwort-Funktionen

- Die Koeffizientenmatrix der MA- Darstellung des VAR-Systems zeigt die Antwort der einzelnen Variablen auf einen Impuls, der vor t-Perioden auf eine Variable eingewirkt hat
- Bezieht sich die Störung auf die i-te Variable des Systems, so ist jeweils die i-te Spalte dieser Koeffizientenmatrix maßgeblich (MA-Darstellung !!!)

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0,23 & 0,11 \\ -0,22 & 0,34 \end{pmatrix}$$

- Die Auswirkungen eines Impuls auf die Systemvariablen in den jeweiligen Perioden sind in den jeweiligen Koeffizientenmatrizen der MA-Darstellung in der ersten Spalte abgebildet. (z.B. die Änderung von  $y_2$  durch einen Schock von  $y_1$ , der zwei Perioden zurückliegt, beträgt -0,22; siehe den Wert aus der Matrix  $B_2$  aus ersten Spalte und zweiten Zeile)
- Die MA- Darstellung eines VAR ist von großer Bedeutung!!

## Wiederholung: Moving-Average Darstellung eines VAR(p)-Prozesses

Annahme: die Stabilitätsbedingung ist erfüllt

- Für das bivariate VAR(2)-Modell können folgende Beziehungen aufgestellt werden:

$$A(L)y_t = \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad y_t = A^{-1}(L)\varepsilon_t$$

$$(I - A_1L - A_2L^2) \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = (I - A_1L - A_2L^2)^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- Die Beziehung kann im allgemeinen Fall eines VAR(p)-Modells geschrieben werden als:

$$y_t = B(L)\varepsilon_t \quad \text{mit} \quad B(L) = A^{-1}(L) = B_0 + B_1L + B_2L^2 + \dots$$

$$y_t = B_0\varepsilon_t + B_1\varepsilon_{t-1} + B_2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{es gilt:} \quad B(L)A(L) = I$$

- Auch der VAR(p)-Prozess kann als unendlicher vektorieller MA-Prozess geschrieben werden

## Wiederholung: Moving-Average Darstellung eines bivariaten VAR(1)-Prozesses

- Berechnung der einzelnen  $B_i$  Matrizen über folgende Gleichung:

$$B_i = A_1 B_{i-1} + A_2 B_{i-2} + \dots + A_q B_{i-q} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$

$$\text{mit } B_0 = I \quad \text{und} \quad B_j = 0_{2 \times 2} \quad \text{für } j < 0$$

$$B_1 = A_1 B_0 = A_1 I_2 = A_1$$

$$B_2 = A_1 B_1 = A_1^2 = A_1^2 \quad \text{da } A_2 \text{ nicht existiert für VAR(1)}$$

usw.

- Der VAR(1)-Prozess kann also auch als unendliche MA-Darstellung aufgeschrieben werden:

$$y_t = B(L) \varepsilon_t = B_0 \varepsilon_t + B_1 \varepsilon_{t-1} + B_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

## Orthogonalisierung der Störterme

- Methodisches Problem der Impuls-Antwort Funktionen:  
Annahme der Unkorreliertheit kontemporärer Störterme
- Eine Störung, die auf eine Variable des VAR wirkt, hat häufig auch unmittelbar Einfluss auf andere Systemvariablen
- Tatsächliche Schocks sind über die Gleichungen hinweg miteinander korreliert
- Nur wenn die Varianz-Kovarianz-Matrix der Störgrößen eine Diagonalmatrix ist, ändern sich die Residuen der übrigen Variablen nicht zeitgleich (kontemporär), wenn eine Störgröße  $\varepsilon_{j,t}$  geschockt wird
- Sind die Störgrößen aber miteinander korreliert, so verändert ein Impuls von  $\varepsilon_{j,t}$  auch gleichzeitig die anderen Störgrößen, so dass die endgültige Wirkung auf die zu untersuchenden Variablen nicht eindeutig dem Impuls  $\varepsilon_{j,t}$  zugeordnet werden kann (Zuordnungsproblem)
- Lösung: Orthogonalisierung der Störterme, d.h. Transformation der Residuen und Systemmatrizen, so dass die transformierten Residuen voneinander unabhängig sind

## Zuordnungsproblem

### Beispiel:

- Es ist davon auszugehen, dass die Störterme in der Sozialprodukts- und in der Geldmengengleichung kontemporär korreliert sind
- Angenommen, die Kovarianzmatrix der Störungen sei

$$\Omega := E\left(\varepsilon_t \varepsilon_t'\right) = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,74 \end{pmatrix}$$

- Ein positiver Impuls auf das Sozialprodukt  $y_1$  ist demnach mit hoher Wahrscheinlichkeit auch mit einer kontemporären ebenfalls positiven Bewegung der Geldmenge  $y_2$  verbunden
- An dieser Stelle tritt bei der Durchführung der Impuls-Antwort-Analyse ein Zuordnungs- bzw. Identifikationsproblem auf  
=> Welcher Impuls bewirkt die beobachtete Reaktion ?

# Orthogonalisierung der Störterme

## Cholesky-Zerlegung

- Für jede symmetrische positiv definite Matrix  $\Omega$  gibt es eine Dreiecksmatrix  $C$  mit positiven Elementen unterhalb der Hauptdiagonalen und Werten 1 auf der Hauptdiagonalen sowie eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass gilt:

$$\Omega = C \cdot D \cdot C'$$

- Die Kovarianzmatrix

$$\Omega := E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,74 \end{pmatrix}$$

- kann so zerlegt werden in die folgende untere Dreiecksmatrix  $C$  und die Einheitsmatrix als Diagonalmatrix:

$$C = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0,5 & 0,7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Orthogonalisierung der Störterme

- Es ist nun möglich, die unendliche MA-Darstellung eines VAR-Prozesses

$$y_t = B_0 \varepsilon_t + B_1 \varepsilon_{t-1} + B_2 \varepsilon_{t-2} \dots = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cdot \varepsilon_{t-i}$$

wie folgt aufzuschreiben:

$$y_t = B_0 C C^{-1} \varepsilon_t + B_1 C C^{-1} \varepsilon_{t-1} + B_2 C C^{-1} \varepsilon_{t-2} \dots = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \varepsilon_{t-i}$$

$$y_t = B_0 C u_t + B_1 C u_{t-1} + B_2 C u_{t-2} \dots = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cdot C \cdot u_{t-i}$$

wobei  $u_t = C^{-1} \varepsilon_t$

wichtig :  $C C^{-1} = I$

## Orthogonalisierung der Störterme

- Die Besonderheit dieser Cholesky-Zerlegung lässt sich nun an den Eigenschaften der modifizierten Störgrößen erkennen
- Es gilt für den Erwartungswert der modifizierten Störgrößen

$$E(\mathbf{u}_t) = 0$$

und für Kovarianzmatrix

$$E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') = E(\mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' \mathbf{C}^{-1}) = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}' \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Die modifizierten Störgrößen sind nicht mehr miteinander kontemporär korreliert
- Die Impuls-Antwort-Funktionen werden nun für das transformierte System berechnet
- Die Veränderung der einzelnen Variablen sind dann eindeutig einzelnen Schocks zu zuordnen.

## Orthogonalisierung der Störterme

- Problematisch bleibt jedoch, dass die gewählte Methode der Orthogonalisierung der Kovarianzmatrix eine bestimmte „Kausalstruktur“ zwischen den kontemporären Variablen impliziert
- Die orthogonalisierte Impuls-Antwort-Funktion hängt somit von der Anordnung (Reihenfolge) der Variablen im VAR-Modell ab  
=> Widerspruch zu Definition von VAR-Systemen
- Dies soll im folgenden gezeigt werden, wobei wir auf die ursprünglich Darstellung des VAR zurückgreifen
- Multiplikation des ursprünglichen VAR(p)-Modells mit  $C^{-1}$  liefert einen VAR-Prozess mit der geforderten orthogonalen Kovarianzstruktur:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$



$$C^{-1} y_t = C^{-1} A_1 y_{t-1} + C^{-1} A_2 y_{t-1} + \dots + C^{-1} A_p y_{t-p} + u_t$$

## Orthogonalisierung der Störterme

- Diese Transformation zeigt aber zugleich, dass aufgrund der unteren Dreiecksform der Matrix  $C^{-1}$  kontemporäre Abhängigkeiten zwischen den Elementen von  $y_t$  hergestellt werden
- Aufgrund der Dreiecksform dieser Matrix entsteht ein besondere Struktur
- Das erste Element von  $y_t$  ist unbeeinflusst von den übrigen Elementen, das zweite Element ist hingegen vom ersten, das dritte vom ersten und vom zweiten abhängig usw. (rekursive Kausalstruktur)
- Die Reihenfolge der Variablen im Vektor  $y_t$  bekommt durch die Orthogonalisierung eine erhebliche Bedeutung
- Kritik kann entschärft werden, wenn eine Veränderung der Reihenfolge der Variablen keine signifikanten Auswirkungen auf die Struktur der Impuls-Antwort Funktionen hat

# Konfidenzintervalle der Impuls-Antwort Funktionen

- Wichtig: Sind die Auswirkungen eines Impulses auf die Systemvariablen signifikant ?
- Berechnung der Konfidenzintervalle:
  1. Analytische Berechnung der Intervalle
  2. Monte Carlo Simulation der Intervalle
  3. Bootstrapping der Intervalle