Zeitreihenökonometrie

Kapitel 7 – Vektorautoregressive Prozesse

Vektorautoregressive Prozesse

- Univariate Zeitreihenanalyse: Analyse einzelner Zeitreihen (univariat)
- Klassische Ökonometrie: Analyse kausaler Zusammenhänge zwischen Variablen

- Vektorautoregressive Modelle (VAR) stellen eine Verbindung zwischen beiden Herangehensweisen her

=> Simultane Analyse mehrerer Zeitreihen (multivariat)

- Idee:

  Der Wert einer Variablen zum Zeitpunkt t ist von den Vergangenheitswerten dieser Variablen abhängig (siehe univariater AR-Prozess) und zudem von den Vergangenheitswerten aller weiteren endogenen Variablen des Systems.

  => Aufhebung der arbiträren Unterscheidung zwischen exogenen und endogenen Variablen (im Gegensatz zur klassischen Ökonometrie)

Vektorautoregressive Prozesse

- Vektorautoregressive Systeme (VAR) können als Spezialfall eines vektoriellen ARIMA-Modells aufgefasst werden
- Auf Basis der Invertierbarkeitsbedingung kann das Modell in ein vektorielles AR(p)-Modell transformiert werden
- In dieser Darstellung sind folglich keine MA-Terme enthalten
- Vorteil von VAR-Modellen (gegenüber univariaten Modellen):
  - Simultane Prognosen für ein System aus n Variablen möglich
  - Analyse von Zusammenhängen zwischen den Variablen eines solchen Systems

Vektorautoregressive Prozesse

Beispiel: VAR-Modell mit zwei Variablen und der Lag-Länge zwei
(Bivariates VAR(2)-Modell)

Variable 1: Bruttoinlandsprodukt y_1

Variable 2: Geldmenge y_2

Darstellung als Einzelgleichungen möglich:

$$(1) \qquad y_{1t} = \alpha^1_{1,1} y_{1,t-1} + \alpha^1_{1,2} y_{2,t-1} + \alpha^2_{1,1} y_{1,t-2} + \alpha^2_{1,2} y_{2,t-2} + \varepsilon_{1,t}$$

$$(2) \qquad y_{2t} = \alpha^1_{2,1} y_{1,t-1} + \alpha^1_{2,2} y_{2,t-1} + \alpha^2_{2,1} y_{1,t-2} + \alpha^2_{2,2} y_{2,t-2} + \varepsilon_{2,t}$$

Vektorautoregressive Prozesse

- Kompakt können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{y}_{1,\mathrm{t}} \\ y_{2,\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{1} & \alpha_{1,2}^{1} \\ \alpha_{2,1}^{1} & \alpha_{2,2}^{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{y}_{1,\mathrm{t-1}} \\ y_{2,\mathrm{t-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{2} & \alpha_{1,2}^{2} \\ \alpha_{2,1}^{2} & \alpha_{2,2}^{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{y}_{1,\mathrm{t-2}} \\ \mathrm{y}_{2,\mathrm{t-2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- bzw. in Matrixschreibweise:

$$y_{\mathrm{t}} = \mathrm{A}_1 y_{\mathrm{t-1}} + \mathrm{A}_2 y_{\mathrm{t-2}} + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

mit

$$\mathrm{y}_{\mathrm{t}} := \left(\mathrm{y}_{1,\mathrm{t}}, y_{2,\mathrm{t}}\right)' \qquad A_j := \begin{pmatrix} a_{1,1}^{j} & a_{1,2}^{j} \\ a_{2,1}^{j} & a_{2,2}^{j} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{t}} := \left(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}\right)'$$

Vektorautoregressive Prozesse

- Über das Lag-Polynom kann das System dargestellt werden als:

$$A(L) \cdot y_t = \varepsilon_t$$

mit

$$A(L) := I - A_1 L - A_2 L^2 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{11}^1 - \alpha_{11}^2 & -\alpha_{12}^1 - \alpha_{12}^2 \\ -\alpha_{21}^1 - \alpha_{21}^2 & 1 - \alpha_{22}^1 - \alpha_{22}^2 \end{pmatrix}$$

- Die insgesamt 8 Koeffizienten der Systemmatrizen A_1 und A_2 können mittels OLS in separaten Regressionen beider Gleichungen geschätzt werden

Vektorautoregressive Prozesse

Annahmen über die Störgrößen

- Der Erwartungswert der beiden Störgrößen ε_i zu jedem Zeitpunkt t beträgt:

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{1,t}\right) = \mathrm{E}\left(\varepsilon_{2,t}\right) = 0 \qquad \text{für alle t=1,2,...,T}$$

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 1} \qquad \text{in Vektorform}$$

- Für die Kovarianz der beiden Störgrößen muss gelten

  1.) Die Kovarianz der Störgrößen zu verschiedenen Zeitpunkten beträgt Null:

  z.B. Beziehung zwischen Störgrößen, die eine Periode auseinander liegen

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t} \cdot \varepsilon_{t-1}^{'}\right) = \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \cdot \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{1,t} \cdot \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t} \cdot \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t} \cdot \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Störgrößen sind in der Zeit nicht autokorreliert !!

Vektorautoregressive Prozesse

2.) Aber: Es existiert eine kontemporäre Varianz-Kovarianz-Matrix Ω mit Werten ungleich Null

$$\Omega = \mathrm{E}\left(\varepsilon_{\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{t}}^{'}\right) = \mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,\mathrm{t}} \\ \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,\mathrm{t}} & \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{1,\mathrm{t}} & \varepsilon_{1,\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \\ \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{1,\mathrm{t}} & \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{2,\mathrm{t}} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(\varepsilon_1) & \operatorname{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \operatorname{var}(\varepsilon_2) \end{pmatrix}$$

Eine kontemporäre Korrelation zwischen den Störgrößen verschiedener Variablen ist möglich!

Insgesamt können die Beziehungen zwischen den Störgrößen wie folgt dargestellt werden:

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{\mathrm{t}} \cdot \varepsilon_{\mathrm{t-j}}^{'}\right) = \begin{cases} \Omega & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Vektorautoregressive Prozesse

Stabilität von VAR-Systemen

- Für univariate AR(p)-Prozesse ist die Stabilitätsbedingung erfüllt, wenn sämtliche Wurzeln der Gleichung
  $$1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-\ldots-\alpha_p z^p=0$$
  betragsmäßig größer 1 sind bzw. außerhalb des Einheitskreises liegen.
- Analog erfüllt ein VAR(p)-Prozess die Stabilitätsbedingung, wenn **alle** Lösungen für z, die die Gleichung
  $$\det\left(I_n-A_1 z-A_2 z^2-\ldots-A_p z^p\right)=0$$
  erfüllen, betragsmäßig größer sind als 1.
- Im Fall eines bivariaten VAR(2)-Modells kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\alpha_{11}^1 z-\alpha_{11}^2 z^2 & -\alpha_{12}^1 z-\alpha_{12}^2 z^2 \\ -\alpha_{21}^1 z-\alpha_{21}^2 z^2 & 1-\alpha_{22}^1 z-\alpha_{22}^2 z^2 \end{pmatrix}=0$$

- Problem: Es müssen hier die Nullstellen eines Polynoms des 4. Grades bestimmt werden

Vektorautoregressive Prozesse

Stabilität von VAR-Systemen – Companion Form

- Transformation eines VAR(p)-Systems in Companion Form, d.h. VAR(1) Form

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_{t-1} = y_{t-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ I_p & 0 \end{bmatrix}}_{\text{F-Matrix}} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

VAR(p) System ist stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i der Matrix F im Betrag kleiner als 1 sind

$$|\lambda I - A| = \left\| \begin{bmatrix} \lambda I_2 & 0 \\ 0 & \lambda I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - A_1 & -A_2 \\ -I_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda A_1 - A_2 = 0$$

Vektorautoregressive Prozesse

Stabilität von VAR-Systemen – Companion Form

- Beispiel: VAR(2) System in Companion Form

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{1} & \alpha_{1,2}^{1} \\ \alpha_{2,1}^{1} & \alpha_{2,2}^{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{2} & \alpha_{1,2}^{2} \\ \alpha_{2,1}^{2} & \alpha_{2,2}^{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{1} & \alpha_{1,2}^{1} & \alpha_{1,1}^{2} & \alpha_{1,2}^{2} \\ \alpha_{2,1}^{1} & \alpha_{2,2}^{1} & \alpha_{2,1}^{2} & \alpha_{2,2}^{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{F-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorautoregressive Prozesse

Moving Average Darstellung eines VAR-Prozesses

- Annahme: die Stabilitätsbedingung ist erfüllt
- Für das bivariate VAR(2)-Modell können folgende Beziehungen aufgestellt werden:

$$A(L)\,y_t = \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad y_t = A^{-1}(L)\,\varepsilon_t$$

$$\left(I - A_1 L - A_2 L^2\right)\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \left(I - A_1 L - A_2 L^2\right)^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- Die Beziehung kann im allgemeinen Fall eines VAR(p)-Modells geschrieben werden als:

$$y_t = B(L)\,\varepsilon_t \qquad mit \;\; B(L) = A^{-1}(L) = B_0 + B_1 L + B_2 L^2 + \ldots$$

$$y_t = B_0\varepsilon_t + B_1\varepsilon_{t-1} + B_2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

$$es\ gilt: \quad B(L)\,A(L) = I$$

- Auch der VAR(p)-Prozess kann als unendlicher vektorieller MA-Prozess geschrieben werden

Vektorautoregressive Prozesse

Moving Average Darstellung des bivariaten VAR(2)-Prozess

- Berechnung der einzelnen B_i Matrizen über folgende Gleichung:

$$B_i = A_1 B_{i\text{-}1} + A_2 B_{i\text{-}2} + \ldots + A_q B_{i\text{-}q} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots..$$

$$mit\ B_0 = I \quad und \quad B_j = 0_{2\times 2} \quad \text{für } j < 0$$

$$B_1 = A_1 B_0 = A_1 I_2 = A_1$$

$$B_2 = A_1 B_1 + A_2 B_0 = A_1^2 + A_2 I_2 = A_1^2 + A_2$$

$$B_3 = A_1 B_2 + A_2 B_1 = A_1^3 + A_1 A_2 + A_1 A_2 = A_1^3 + 2 A_1 A_2 \qquad da\ A_3\ nicht\ existiert\ \text{für}\ VAR(2)$$

- Der VAR(2)-Prozess kann also auch als unendliche MA-Darstellung aufgeschrieben werden:

$$y_t = B(L)\varepsilon_t = B_0 \varepsilon_t + B_1 \varepsilon_{t\text{-}1} + B_2 \varepsilon_{t\text{-}2} + \ldots + B_q \varepsilon_{t\text{-}q}$$

Vektorautoregressive Prozesse

Moving Average Darstellung des VAR(p)-Prozesses mit n Variablen und n Konstanten

- Annahme: Stationarität des VAR(p)-Systems
- Für unseren VAR(p)-Prozess mit Konstanten können folgende Beziehungen aufgestellt werden:

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \ldots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad VAR(p)\text{-}Darstellung$$

$$mit \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}'$$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + B_1 \varepsilon_{t-1} + B_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + B_q \varepsilon_{t-q} \qquad MA(\infty)\text{-}Darstellung$$

- μ stellt hierbei den Mittelwertsvektor (Erwartungswertvektor) dar:

$$\mathrm{E}(\mathrm{y_t}) = \mu$$

$$\text{mit } \mu = \left(\mathrm{I_n} - \mathrm{A_1} - \mathrm{A_2} - \ldots - \mathrm{A_p}\right)^{-1} \cdot \mathrm{c}$$

Vektorautoregressive Prozesse

- Die Varianzen und Kovarianzen der Variablen, die in diesem VAR-System einbezogen werden, können in einer Varianz-Kovarianzmatrix dargestellt werden
- Allgemeine Berechnung für einen VAR(p) mit n Variablen und Konstanten:

$$\Gamma_j = E\left[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)'\right]$$

$$\Gamma_j = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(y_{1,t}, y_{1,t-j}) & \operatorname{cov}(y_{1,t}, y_{2,t-j}) & \dots & \operatorname{cov}(y_{1,t}, y_{n,t-j}) \\ \operatorname{cov}(y_{2,t}, y_{1,t-j}) & \operatorname{cov}(y_{2,t}, y_{2,t-j}) & \dots & \operatorname{cov}(y_{2,t}, y_{n,t-j}) \\ \dots & \dots & & \dots \\ \operatorname{cov}(y_{n,t}, y_{1,t-j}) & \operatorname{cov}(y_{n,t}, y_{2,t-j}) & \dots & \operatorname{cov}(y_{n,t}, y_{n,t-j}) \end{pmatrix}$$

für j = 0 $\Rightarrow$ Γ_j als kontemporäre Varianz-Kovarianz Matrix von y_t

Vektorautoregressive Prozesse

- Varianz-Kovarianz Matrix für einen bivariaten VAR(2)-Prozess:

$$\Gamma_j = E\left[(y_t)\cdot(y_{t-j})'\right] = E\left[\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_{1,t-j} & y_{2,t-j} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Gamma_j = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(y_{1,t}, y_{1,t-j}) & \mathrm{cov}(y_{1,t}, y_{2,t-j}) \\ \mathrm{cov}(y_{2,t}, y_{1,t-j}) & \mathrm{cov}(y_{2,t}, y_{2,t-j}) \end{pmatrix}$$

für $j = 0 \;\rightarrow$ kontemporäre Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(y_{1,t}) & \mathrm{cov}(y_{1,t}, y_{2,t}) \\ \mathrm{cov}(y_{2,t}, y_{1,t}) & \mathrm{var}(y_{2,t}) \end{pmatrix}$$

Granger-Kausalität

- VAR-Modelle ermöglichen Aussagen über den dynamischen Zusammenhang zwischen den Variablen
- VAR-Modelle sind jedoch nicht dafür geeignet, um Aussagen über kausale Zusammenhänge zwischen einzelnen Variablen zu treffen
- Grund ist die zeitliche Wechselwirkung zwischen den Variablen
- Das Konzept der Granger-Kausalität testet, ob ein dynamischer Zusammenhang zwischen Variablen existiert. Dies darf jedoch **nicht** mit einer Kausalität im üblichen Sinne gleichgesetzt werden
- Die Granger-Kausalität setzt an der zeitlichen Folge von Ursache und Wirkung an
- Notwendige Bedingung für eine Ursache/Wirkungs-Kette ist, dass die Ursache der Wirkung zeitlich vorausgeht
- Eine Variable y_1 gilt als Granger-kausal für eine Variable y_2, wenn die Erklärungskraft eines autoregressiven Ansatzes für y_1 durch die Aufnahme verzögerter Werte von y_2 erhöht werden kann.

Granger-Kausalität

Definition

y_2 ist Granger-kausal für y_1, falls gilt:

$$(\mathrm{I})\quad MSE\left(\hat{y}_{1,t+\tau|t}\,\middle|\,y_{1,t}, y_{1,t\text{-}1},\ldots, y_{2,t}, y_{2,t\text{-}1},\ldots\right) < MSE\left(\hat{y}_{1,t+\tau|t}\,\middle|\,y_{1,t}, y_{1,t\text{-}1},\ldots\right)$$

y_2 ist Granger-kausal für y_1, falls der mittlere quadratische Prognosefehler MSE für y_1 kleiner wird, wenn der laufende und die vergangenen Werte von y_2 als zusätzliche Information berücksichtigt werden.

Gilt in (I) ein Gleichheitszeichen für **alle** τ, so ist die Variable y_2 nicht Granger-kausal für y_1.

(Es kann nie eine > Relation auftreten)

Granger-Kausalität

- Im Var(1)-Modell mit 2 Variablen und ohne Konstante:

$$y_{1t} = \alpha_{11} y_{1,t-1} + \alpha_{12} y_{2,t-1} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_{21} y_{1,t-1} + \alpha_{22} y_{2,t-1} + u_{2t}$$

ist y_2 nicht Granger-kausal für y_1, wenn gilt: $\alpha_{12} = 0 \rightarrow t - \text{Test}$

- Im Fall eines bivariaten Var(p)-Prozess mit 2 Variablen und ohne Konstante

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{1} & \alpha_{12}^{1} \\ \alpha_{21}^{1} & \alpha_{22}^{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{p} & \alpha_{12}^{p} \\ \alpha_{21}^{p} & \alpha_{22}^{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

kann die Null-Hypothese, dass y2 nicht granger-kausal für y1 ist, formuliert werden als:

$$H_0 : \alpha_{12}^{i} = 0 \quad \text{für alle } i = 1,2,\ldots,p$$

Anstelle eines einfachen t-Test muss dann ein F-Test eingesetzt werden

Granger-Kausalität

- In einem bivariaten VAR(p)-System ist y_2 nicht Granger-kausal für y_1, wenn alle A_i-Matrizen untere Dreiecksmatrizen darstellen :

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{1} & 0 \\ \alpha_{21}^{1} & \alpha_{22}^{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t\text{-}1} \\ y_{2,t\text{-}1} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{p} & 0 \\ \alpha_{21}^{p} & \alpha_{22}^{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t\text{-}p} \\ y_{2,t\text{-}p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- Es gilt dann:

$$y_{1,t} = \alpha_{11}^{1} y_{1,t\text{-}1} + \alpha_{11}^{2} y_{1,t\text{-}2} + \ldots + \alpha_{11}^{p} y_{1,t\text{-}p} + \varepsilon_{1,t}$$

- Damit hat die Berücksichtigung vergangener Werte von y_2 keinen Einfluss auf die Prognose des aktuellen Wertes von y_1 und kann damit den MSE nicht verkleinern

Granger-Kausalität

MA-Darstellung eines VAR(p)-Systems ohne Konstanten:

- Die B_i –Matrizen in der MA-Darstellung eines bivariaten VAR(p)-Systems

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} + B_1 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + B_2 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-2} \end{pmatrix} + \dots$$

sind definiert als:

$$B_j = A_1 B_{j-1} + A_2 B_{j-2} + \dots + A_p B_{j-p}$$

- Es lässt sich analog zeigen, dass auch die B_i –Matrizen untere Dreiecksmatrizen sind, wenn y_2 **nicht** Granger-kausal ist zu y_1**:**

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(L) & 0 \\ b_{21}(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } b_{ij}(L) = b_{ij}^0 + b_{ij}^1 L + b_{ij}^2 L^2 + \dots$$

Granger-Kausalität

Test auf Granger-Kausalität im allgemeineren Fall eines bivariaten VAR(p)-Modells

1. Schritt: Regression inkl. y_2 als Regressoren

$$y_{1,t} = \alpha_1 y_{1,t-1} + \alpha_2 y_{1,t-2} + \ldots + \alpha_p y_{1,t-p} + \beta_1 y_{2,t-1} + \beta_2 y_{2,t-2} + \ldots + \beta_p y_{2,t-p} + u_t$$

Berechnung der Fehlerquadratsumme: $\mathrm{RSS}_1 = \sum_t \hat{u}_t^2$

2. Schritt: Regression exkl. y_2 als Regressoren

$$y_{1,t} = \alpha_1 y_{1,t-1} + \alpha_2 y_{1,t-2} + \ldots + \alpha_p y_{1,t-p} + v_t$$

Berechnung der Fehlerquadratsumme: $\mathrm{RSS}_0 = \sum_t \hat{v}_t^2$

Nullhypothese: **keine** Granger-Kausalität

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad RSS_0 = RSS_1$$

Granger-Kausalität

Test auf Granger-Kausalität => 2 mögliche Teststatistiken

(1) Test:

$$S_1 = \frac{\left(RSS_0 - RSS_1\right)}{RSS_1} \cdot \frac{T - \left(2p+1\right)}{p} \quad \sim \quad F\left(p,\ T-(2p+1)\right)$$

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn S_1 größer ist als der kritische Wert aus der F- Verteilung mit Freiheitsgraden p und T-2(p+1)

(2) Test :

$$S_2 = \frac{\left(RSS_0 - RSS_1\right)}{RSS_1} \cdot T \quad \sim \chi^2\left(p\right)$$

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn S_2 größer ist als der kritische Wert aus der χ^2- Verteilung mit p Freiheitsgraden

Granger Kausalität

Im Fall eines bivariaten VAR-Modells ergeben sich folgende Möglichkeiten:

	$y_{1,t}$ in Gleichung für $y_{2,t}$	
$y_{2,t}$ in Gleichung für $y_{1,t}$	signifikant	nicht signifikant
signifikant	$y_{1,t} \Leftrightarrow y_{2,t}$	$y_{2,t} \Rightarrow y_{1,t}$
nicht signifikant	$y_{1,t} \Rightarrow y_{2,t}$	keine Kausalität zwischen $y_{1,t}, y_{2,t}$

Granger-Kausalität

- Erweiterung des Konzepts der Granger-Kausalität auf den Fall mit mehr als zwei Variablen ist problematisch
- Beispiel: VAR(2) mit drei Variablen und ohne Konstante:

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 & \alpha_{13}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 & \alpha_{23}^1 \\ \alpha_{31}^1 & \alpha_{32}^1 & \alpha_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{3,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}$$

- In diesem System ist die Hypothese

$$H_0 : \alpha_{12}^1 = \alpha_{12}^2 = 0$$

keine Nullhypothese eines Tests auf Granger-Kausalität der Variable $y_{2,t}$ für $y_{1,t}$

Granger-Kausalität

- Grund: indirekter Wirkung von $y_{2,t}$ auf $y_{1,t}$ ist möglich:

$$y_{2,t} \Rightarrow y_{3,t} \text{ und } y_{3,t} \Rightarrow y_{1,t}$$

- Daher Test (F-Test) der Hypothese der Blockexogenität von $y_{1,t}$ notwendig

$$H_0: \alpha_{12}^1 = \alpha_{12}^2 = \alpha_{13}^1 = \alpha_{13}^2 = 0$$

so dass die Variable $y_{2,t}$ die Variable $y_{1,t}$ weder direkt noch indirekt beeinflussen kann.

alternativ:

$$H_0: \alpha_{12}^1 = \alpha_{12}^2 = \alpha_{32}^1 = \alpha_{32}^2 = 0$$