

Zeitreihenökonomie

Kapitel 6 – Nichtstationäre univariate Zeitreihenmodelle



Nichtstationäre Prozesse

- Rein optisch zeigen viele makroökonomische und Finanzmarkt-Zeitreihen einen steigenden Trendverlauf
 - Prozesse, die einem Trend folgen, werden in der Literatur häufig als nichtstationäre Prozesse bezeichnet
 - Es ist zu unterscheiden, ob diese Zeitreihen auf eine deterministische Trendlinie zurückkehren oder einem stochastischen Trend folgen
 - Die Unterscheidung ist wichtig, weil die üblichen Schätz- und Testverfahren bei Variablen, die stochastischen Trends folgen, nicht anwendbar sind
- ⇒ Trendstationäre Prozesse: deterministischer Trend
- ⇒ Differenzenstationäre Prozesse: stochastischer Trend

Nichtstationäre Prozesse

Integrationsgrad einer Zeitreihe

- Eine Zeitreihe $\{\mathbf{Y}_t\}_{t=1}^T$ heißt integriert von der Ordnung n , mit $I(n)$ bezeichnet, wenn sie nach n -maliger Differenzenbildung einem stabilen und invertierbaren ARMA-Prozess und damit einem $I(0)$ -Prozess folgt.
- Die $I(0)$ Eigenschaft ist hinreichend für Stationarität
- Aber es gibt stationäre Prozesse, die nicht invertierbar sind (kein $I(0)$ -Prozess)

Nichtstationäre Prozesse I – Stochastische Trends

Random Walk Prozess

$$Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{mit } \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

(1) Random Walk ohne Drift für $c=0$ (langfristig nicht wachsend)

(2) Random Walk mit Drift für $c \neq 0$ (langfristig wachsend)

- Iterative Substitution von $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-T}$

$$Y_t = Y_0 + ct + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s \quad \text{mit } \varepsilon_s \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

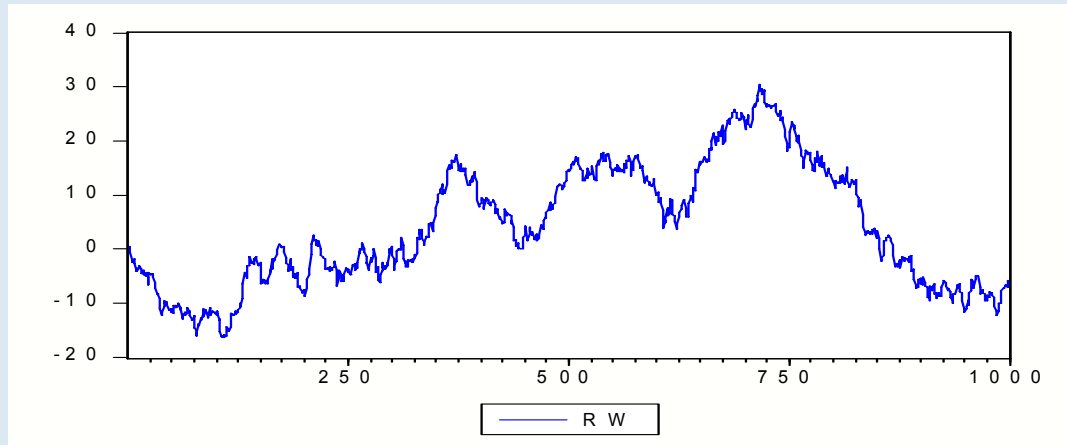
- Beide Parameter sind also nicht konstant über den Zeitverlauf.

$$E(Y_t) = E(Y_0) + t \cdot c$$

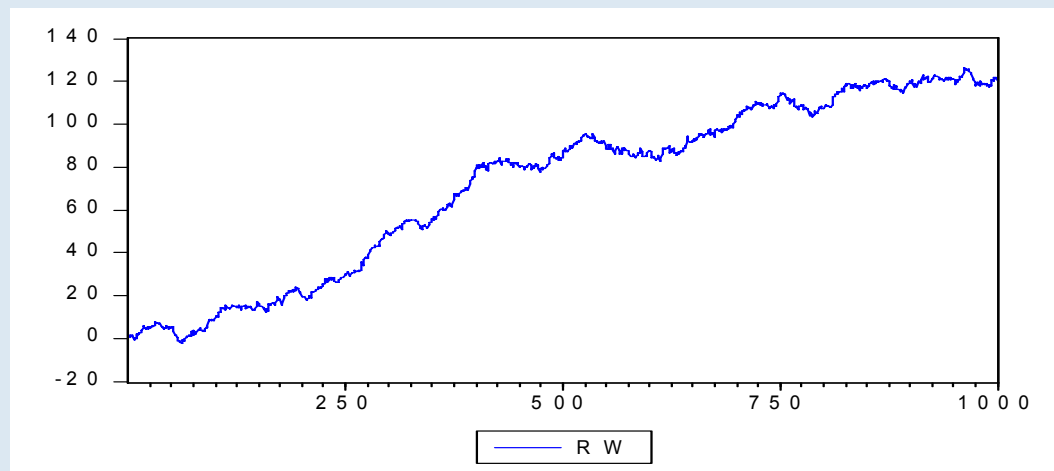
$$\text{Var}(Y_t) = t \cdot \sigma^2$$

Nichtstationäre Prozesse I – Stochastische Trends

- Beispiel für einen Random Walk ohne Drift:



- Beispiel für einen Random Walk mit Drift:



Nichtstationäre Prozesse I – Stochastische Trends

- Der Random Walk kann durch das Bilden der ersten Differenz in einen stationären White Noise Prozess überführt werden:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = c + \varepsilon_t$$

- Der Random Walk ist also ein I(1) Prozess und folgt nach einmaliger Differenzenbildung einem I(0) Prozess
- Der transformierte Prozess ist somit stationär und kann mit den Box Jenkins Methoden der stationären Zeitreihenanalyse geschätzt und prognostiziert werden

Nichtstationäre Prozesse I – Stochastische Trends

Verallgemeinerung der Herleitung: Unit-Root-Prozesse

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ist stationär, falls die Lösungen des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen, bzw. deren Kehrwerte innerhalb des Einheitskreises.

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p) Y_t = \varepsilon_t$$

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L) Y_t = \varepsilon_t \quad \lambda_i = z_i^{-1}$$

- Bei einem Random Walk besitzt die einzige Lösung λ der Gleichung den Wert eins und wird deshalb auch Unit Root (Einheitswurzel) genannt. Sie liegt also genau auf dem Einheitskreis.
- Dieses Resultat des Random Walk lässt sich auf den AR(p)-Prozess verallgemeinern.
- Wir unterstellen, dass d Wurzeln der Gleichung den Betrag eins besitzen und die restlichen Wurzeln $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, p - d$ betragsmäßig kleiner eins sind.

Nichtstationäre Prozesse I – Stochastische Trends

- Das Lag-Polynom des Prozesses kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\alpha(L) = (1-L)^d \underbrace{(1-\lambda_{d+1}L)\dots(1-\lambda_pL)}_{\alpha_2(L)}$$

- Da das Polynom $\alpha_2(L)$ invertierbar ist, ist der Prozess auf der rechten Seite der Gleichung ein stationärer MA-Prozess:

$$(1-L)^d Y_t = \frac{1}{(1-\lambda_{d+1}L)(1-\lambda_{d+2}L)\dots(1-\lambda_pL)} \varepsilon_t$$

- Der AR(p)-Prozess mit d Einheitswurzeln kann folglich durch d-maliges Differenzieren in einen stationären Prozess umgewandelt werden und verkörpert einen I(d)-Prozess.
- Unter einem ARIMA(p,d,q)-Prozess versteht man analog einen stochastischen Prozess, der nach d-maligen Bilden von Differenzen in einen stationären ARMA(p,q)-Prozess überführt werden kann.

Nichtstationäre Prozesse II – Deterministische Trends

Trendstationäre Prozesse

- Es können auch Probleme bei der Integration auftreten wie zum Beispiel bei der folgenden trendstationären Zeitreihe (oder für $a=0$ stationären) Zeitreihe:

$$Y_t = c + at + \varepsilon_t$$

- Die Bildung von Differenzen führt zu:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = a + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

- Der Trend der Zeitreihe wurde eliminiert und die Zeitreihe ist stationär. Aber gleichzeitig ist ein nicht invertierbarer MA(1)-Prozess entstanden. Es existiert dann keine AR-Darstellung.
- Es resultiert somit keine I(0)-Zeitreihe (Überdifferenzierung).

Nichtstationäre Prozesse - Unterscheidung

Einheitswurzeltests/ Unit-Root Ökonometrie

- Einheitswurzeltests (Unit-Root Tests) testen auf die Stationaritätseigenschaft von Prozessen

Dickey-Fuller t-Test

- Betrachtung des einfachen AR(1)-Fall ohne Konstante:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Die Nichtstationaritäts-Nullhypothese (hier Random Walk ohne Drift) lautet:

$$H_0 : \alpha = 1$$

- Die Stationaritäts-Alternativhypothese (stationärer AR(1)-Prozess) lautet:

$$H_1 : \alpha < 1$$

Nichtstationäre Prozesse

- Der DF-Test ist ein einseitiger t-Test, der auf Parameter testet, die mit der Kleinst-Quadrat-Methode geschätzt werden
- Die Teststatistik berechnet sich nach:

$$t = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_t y_{t-1}^2}$$

Nichtstationäre Prozesse

- Die berechnete t-Statistik genügt wegen der I(1)-Eigenschaft der Zeitreihe unter der Nullhypothese nicht der üblichen t-Verteilung!!!
- Die kritischen Werte resultieren aus den Berechnungen von MacKinnon und Davidson
- Die kritischen MacKinnon-Werte sind im Betrag deutlich größer als die diejenigen der t-Verteilung, da der OLS Schätzer für die Varianz eine Verzerrung aufweist, wenn der wahre Wert von α gleich Eins beträgt (Restriktion für die Ablehnung der Nullhypothese wird verschärft)
- Zudem hängen die kritischen Werte von der Spezifikation der Regressionsgleichung bezüglich der Konstanten und dem Trend ab
- Bei der Betrachtung eines Random Walk mit Drift gegen die Alternative eines stationären AR(1)-Prozesses mit Mittelwert ungleich Null, muss noch eine Konstante in die Regressionsgleichung eingefügt werden:

$$Y_t = c + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \alpha = 1$$

$$H_1 : \alpha < 1$$

Nichtstationäre Prozesse

- Schließlich ist noch die Alternative eines trendstationären Prozesses von Interesse
- Für diesen Zweck wird eine Trendvariable in die Regressionsgleichung eingefügt:

$$Y_t = c + \delta t + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \alpha = 1$$

$$H_1 : \alpha < 1$$

- Die bis jetzt betrachteten Varianten des DF-Tests können jedoch nicht die Nullhypothese von autokorrelierten I(0)-Differenzen abbilden
- Der Test muss dazu erweitert werden

Nichtstationäre Prozesse

Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test

- Die Testgleichung für den einfachen DF-Test ohne Autokorrelation der Störgrößen lautet:

$$Y_t = c + \delta t + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Um die Autokorrelation der Störgrößen zu beseitigen wird die Testgleichung um $p-1$ verzögerte Differenzen ergänzt, daneben wird auf beiden Seiten der Gleichung Y_{t-1} abgezogen:

$$Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = c + \delta t + \alpha^* Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{mit } \alpha^* = \alpha - 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \sum_{j=1}^p \alpha_j \quad \text{sowie} \quad \phi_i = - \sum_{i=j+1}^p \alpha_j$$

$$H_0 : \alpha^* = 0 \quad \text{(Hypothese für Nichtstationarität)}$$

$$H_1 : \alpha^* < 0 \quad \text{(Hypothese für Trendstationarität)}$$

- Mit diesem Modell kann die Nullhypothese eines in Differenzen stationären AR(p-1)-Prozesses gegen die Alternative eines trendstationären AR(p)-Prozesses überprüft werden

Nichtstationäre Prozesse

- Die Stationaritätstest kann je nachdem, ob die Konstante c oder der lineare Zeittrend δt gleich Null gesetzt werden in drei verschiedenen Schätzgleichungen geschrieben werden
- Die Koeffizienten können stets mit der KQ-Methode geschätzt werden
- Unter der Nullhypothese, dass das charakteristische Polynom eine Wurzel vom Betrag Eins besitzt, ist $\alpha^* = 0$, und die t-Statistik ist auch asymptotisch nicht standardnormalverteilt
- Kann man die Nullhypothese verwerfen, so ist die Alternative entweder ein stationärer AR(p)-Prozess ohne Konstante (Schätzgleichung mit $c = \delta t = 0$), ein stationärer AR(p)-Prozess mit Konstante (Schätzgleichung mit $\delta t = 0$) oder ein stationärer AR(p)-Prozess mit einem linear ansteigenden Trend.

Nichtstationäre Prozesse

- Der Wert von p kann Hilfe des AIC- oder BIC- Kriteriums bestimmt werden, wobei man p^{\max} wie folgt wählen kann:

$$p^{\max} = \text{floor} \left[12 \left(\frac{T}{100} \right)^{1/4} \right]$$

- Hierbei steht floor für den ganzzahligen Wert seines Arguments (hier Wert in der eckigen Klammer)