

Zeitreihenökonomie

Kapitel 4 – Schätzung univariater Zeitreihenmodelle



Schätzung von ARMA-Prozessen

$$Y_t = c + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

Problem:

Direkte Schätzung der Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ und β_1, \dots, β_q über OLS nicht möglich, da die Residuen ε_i (mit $i=1, \dots, N$) nicht bekannt sind.

Es existieren verschiedene Methoden zur Schätzung von ARMA Modellen

- Momentenmethode (Yule-Walker Gleichungen)
- Kleinste-Quadrate Schätzungen (OLS)
 - Conditional Least Squares (CLS)
 - Unconditional Least Squares (UCLS)
- Maximum-Likelihood Schätzungen (ML)

2 => Voraussetzung: Modellordnung (p,q) des ARMA-Prozesses ist bekannt !!!!

Schätzung von ARMA-Prozessen

Momentenmethode

Die Idee der Momentenmethode besteht darin, so viele empirische Momente mit den theoretischen Momenten gleichzusetzen, wie es Parameter zu schätzen gibt, und die resultierenden Gleichungen nach den unbekanntem Parametern aufzulösen.

Für reine AR-Prozessen liefert die Momentenmethode optimale Schätzer. Für reine MA-Prozesse oder gemischte ARMA-Prozesse sind diese Schätzer jedoch i.A. nicht optimal. Die Werte dienen dann oft als Startwerte für iterative Methoden.

Ein Beispielfahrer ist die Yule-Walker Gleichung, bei der die Schätzer der AR-Koeffizienten iterativ aus den empirischen Autokorrelationsfunktionen berechnet werden.

Schätzung von ARMA-Prozessen

Momentenmethode

Für AR(p)-Prozesse sind die YULE-WALKER-Schätzer optimal in dem Sinne, dass Sie für $T \rightarrow \infty$ die kleinste Varianz besitzen.

Grund: AR(p)-Modelle sind linear in den Koeffizienten und YULE-WALKER-Schätzer sind damit im Wesentlichen KQ-Schätzer.

Im Prinzip können die YULE-WALKER-Schätzer auch für MA(q)- und ARMA(p,q)-Prozesse mit $q > 0$ angewendet werden. Die YULE-WALKER-Schätzer sind dann jedoch nicht mehr in dem oben beschriebenen Sinne optimal. Bereits die Anwendung auf den MA(1)-Prozess zeigt, dass dies zu einem nichtlinearen Gleichungssystem für die beiden Parameter führt, das u.U. keine oder mehrere Lösungen hat.

Schätzung von ARMA-Prozessen

Kleinste-Quadrate Schätzungen (OLS) von ARMA Modellen

$$Y_t = c + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

Ziel: Minimierung der Quadratsumme der Residuen

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

Beispiel: ARMA(1,1)

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Bestimmung der unbekanntenen ε_t :

- Vernachlässigung der Startwerte (CLS)
- Schätzung geeigneter Startwerte (UCLS)

Schätzung von ARMA-Prozessen

Conditional Least Squares Schätzung (CLS)

Initialisierung: $Y_t = \varepsilon_t = 0$ für $t \leq 0$ Es gehen aber die ersten p -Beobachtungen verloren !!!
 $\varepsilon_t = Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$ für $t > 0$

Berechne rekursiv:

$$\varepsilon_1 = Y_1$$

$$\varepsilon_2 = Y_2 - \alpha_1 Y_1 - \beta_1 \varepsilon_1 = Y_2 - \alpha_1 Y_1 - \beta_1 Y_1 = Y_2 - Y_1 (\beta_1 + \alpha_1)$$

$$\varepsilon_3 = Y_3 - \alpha_1 Y_2 - \beta_1 \varepsilon_2 = Y_3 - \alpha_1 Y_2 - \beta_1 (Y_2 - Y_1 (\beta_1 + \alpha_1))$$

Minimiere die nichtlineare Funktion: $\min_{\alpha_1, \beta_1} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$

Schätzung von ARMA-Prozessen

Unconditional Least Squares Schätzung (UCLS)

- ARMA(p,q)-Prozess lautet bei der ersten Beobachtung wie folgt:

$$Y_1 = c + \alpha_1 Y_0 + \dots + \alpha_p Y_{-p+1} + \varepsilon_1 + \beta_1 \varepsilon_0 + \dots + \beta_q \varepsilon_{-q+1}$$

- Die Werte $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1}$ und $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{-q+1}$ sind aber unbekannt.
- Bei der UCLS Methode wird für die nicht beobachteten Y_{-j} -Werte jeweils der Mittelwert eingesetzt und die nicht beobachteten Störgrößen ε_{-k} werden jeweils ihrem Erwartungswert Null gleichgesetzt.
- Die Kleinst-Quadrat-Schätzung ist auf Grund dieser Annahmen möglich.
- Die geschätzten Parameter können bei sehr großem Stichprobenumfang analog zum bekannten Regressionsmodell getestet werden.
- Sie sind asymptotisch unverzerrt, konsistent und asymptotisch normalverteilt.

Schätzung von ARMA-Prozessen

Maximum Likelihood Schätzung (ML)

Das Standardverfahren zur Parameterschätzung bei reinen MA-Modellen und gemischten und ARMA-Modellen ist die Maximum-Likelihood-Methode. Bei dieser Methode werden diejenigen Parameter gewählt, die den Wert der gemeinsamen Dichte an der Stelle der Stichprobe (die vorliegende Zeitreihe) maximieren. Der ML-Schätzer des Parametervektors bei einer gegebenen Stichprobe ist der Vektor, der die Wahrscheinlichkeit(sdichte) genau diese Stichprobe zu erhalten, maximiert.

Probleme:

- Fehlende Erwartungstreue des ML-Schätzers
- Hoher numerischer Rechenaufwand
- Verteilungsannahme

Schätzung von ARMA-Prozessen

Idee der Maximum Likelihood Schätzung

- Zusammenfassung aller Modellparameter im Vektor $\theta = [c \ \alpha_1 \dots \alpha_p \ \beta_1 \dots \beta_q \ \sigma^2]$
- Verteilungsannahmen bezgl. der Stichprobenvariablen Y_1, \dots, Y_T
- Berechnung der gemeinsamen Dichtefunktion $f_{Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1}(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1)$
- Betrachtung der Dichtefunktion als Funktion im unbekanntem Parametervektor

$$L(\theta) = f_{Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1}(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1; \theta)$$

- Maximiere $\log(L(\theta))$ bezgl. θ

Schätzung von ARMA-Prozessen

Maximum Likelihood Schätzung (ML)

- Die ML Methode geht von der Likelihood Funktion aus, die die Wahrscheinlichkeit, die vorliegende Zeitreihe $\{Y_t\}_{t=1}^T$ zu beobachten, als Funktion eines Vektors von den Parametern θ beschreibt.
- Ziel ist es, den Vektor an Parametern θ zu schätzen, der den natürlichen Logarithmus der Likelihood Funktion maximiert.

Wichtig: Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable y ist definiert als:

$$f_Y(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

Sidestep: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln eine 2 zu erhalten, wenn man schon weiß, dass eine gerade Zahl gewürfelt wurde?
- Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu erhalten: $P(A) = 1/2$
- Wahrscheinlichkeit eine 2 zu würfeln: $P(B) = 1/6$
- Gemeinsame Wahrscheinlichkeit eine 2 und eine gerade Zahl zu erhalten:
 $P(A \cap B) = 1/6$
- Die Wahrscheinlichkeit eine 2 zu erhalten, wenn eine gerade Zahl gewürfelt wurde, kann mit Hilfe der folgenden Gleichung bestimmt werden (bedingte Wahrscheinlichkeit):

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3 \quad \text{Bayes Formel}$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

Sidestep: Bedingte Wahrscheinlichkeiten II

- Die einfache gemeinsame Wahrscheinlichkeit von Ereignissen lässt sich wie folgt berechnen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (1)$$

- Bei 3 Ereignissen sind die gemeinsame Wahrscheinlichkeit so aus:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) \quad (2)$$

- Setzt man jetzt man die Gleichung (1) in Gleichung (2) ein und nimmt an, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von C nur von B abhängt, erhält man:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|B)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

AR(1)-Prozess

- Für den Prozess $Y_t = c + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$
mit $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

soll eine ML-Schätzung des Parametervektors $\theta = (c, \alpha, \sigma^2)$
erfolgen.

- Die Likelihood-Funktion beschreibt für einen gegebenen Parametervektor $\theta = (c, \alpha, \sigma^2)$
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die vorliegende Zeitreihe $\{Y_t\}_{t=1}^T$ realisiert wurde.

Schätzung von ARMA-Prozessen

Exakte Likelihood Bestimmung

- Beginn mit der ersten Realisation Y_1 des Zeitreihenprozesses $\{Y_t\}_{t=1}^T$.
- Wir wissen:
$$E(Y_1) = \mu = \frac{c}{1-\alpha}$$
$$E(Y_1 - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$
- Auf Grund der Normalverteilung der Störgröße ε_t ist auch Y_1 normalverteilt.
- Die Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariable Y_1 lautet:

$$f_{Y_1}(y_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\alpha^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1 - c/(1-\alpha))^2}{2\sigma^2/(1-\alpha^2)}\right)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Für die zweite Beobachtung gilt: $Y_2 = c + \alpha Y_1 + \varepsilon_2$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit von Y_2 bei gegebenen $Y_1 = y_1$ ist wegen der Normalverteilung von ε_2 auch normalverteilt

$$(Y_2 | Y_1 = y_1) \sim N(c + \alpha y_1, \sigma^2)$$

mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_2 - c - \alpha y_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Für die beiden Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 kann die gemeinsame Dichtefunktion mit Hilfe der bedingten Verteilung berechnet werden:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2, \theta) = f_{Y_2|Y_1}(y_2 | y_1, \theta) \cdot f_{Y_1}(y_1, \theta)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- In einem AR(1)-Prozess nehmen die Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1} nur durch die Zufallsvariable Y_{t-1} Einfluss auf Y_t .
- Die bedingte Dichte für Y_t ist definiert als:

$$f_{Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1}(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1; \theta) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - c - \alpha y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Die gemeinsame Dichte für die ersten t beobachteten Realisationen von Y_t lässt sich nun rekursiv bestimmen

$$f_{Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1}(y_t, y_{t-1}, \dots, y_1; \theta) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}; \theta) f_{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1}(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1; \theta)$$

Und als gemeinsame Dichte bzw. Likelihood Funktion L der gesamten Zeitreihe formulieren:

$$L(y_1, y_2, \dots, y_T; \theta) = f_{Y_1}(y_1; \theta) \prod_{t=2}^T f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}; \theta)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die logarithmierte Likelihood Funktion des AR-Prozesses lässt sich schreiben als:

$$\ln L(\theta) = \ln f_{Y_1}(y_1; \theta) + \sum_{t=2}^T \ln f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}; \theta)$$

- Setzt man die Werte der Dichtefunktionen ein, so entsteht folgendes Ergebnis:

$$\ln L(\theta) = \underbrace{-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)} \right] - \frac{\left\{ Y_1 - \left[\frac{c}{(1-\alpha)} \right] \right\}^2}{2\sigma^2 \frac{1}{(1-\alpha^2)}}}_{\text{erste Beobachtung}} - [(T-1)/2] \ln(2\pi) - [(T-1)/2] \ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \left[\frac{(Y_t - c - \alpha Y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right]$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die Maximierung der logarithmierten Likelihood Funktion für eine gegebene Zeitreihe mit Hilfe der unbekannt Parameter c, α und σ^2 liefert die Maximum-Likelihood-Schätzer dieser drei Größen.
- Dieses entspricht einem nichtlinearen Optimierungsproblem, so dass eine analytische Darstellung wie bei der linearen Regression nicht möglich ist.
- Numerische Verfahren (Newton-Raphson-Algorithmus, Berndt-Hall-Hall-Hausmann-Algorithmus) werden hier angewendet.

Schätzung von ARMA-Prozessen

Bedingte Maximum-Likelihood-Bestimmung

- Bei der bedingten ML-Bestimmung wird die erste Beobachtung nicht als Zufallsvariable betrachtet, sondern als deterministisch gegeben angesehen.
- Der erste Teil der Likelihood entfällt und die logarithmierte Likelihood Funktion vereinfacht sich zu folgender Gleichung:

$$\ln L(\theta) = -[(T-1)/2] \ln(2\pi) - [(T-1)/2] \ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \left[\frac{(Y_t - c - \alpha Y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right]$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die Maximierung dieser reduzierten Form bezüglich der Parameter c und α erfolgt durch die Minimierung der Summe:

$$\sum_{t=2}^T \left[\frac{(Y_t - c - \alpha Y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right]$$

- Als Ergebnis aus dem Optimierungsproblem erhält man die bekannten KQ- Schätzer für die Parameter c und α .
- Als ML-Schätzer für die Varianz erhält man:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_t - \hat{c} - \hat{\alpha} Y_{t-1})^2}{T - 1}$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die Bedingte ML-Schätzung beim AR(1)-Prozess ist für jeden Wert von α zulässig, wohingegen bei der exakten Methode das α betragsmäßig kleiner sein muss als eins, ansonsten sind die Formeln für den Erwartungswert und die Varianz der ersten Zufallsvariable Y_1 hinfällig.
- Das bedingte Verfahren liefert stets konsistente Schätzer.
- In der Regel werden AR(1)- und AR(p)-Prozesse mit Kleinst-Quadrat-Verfahren geschätzt.

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Betrachtung MA(1)-Prozess $Y_t = c + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$ $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

Ziel ist eine ML-Schätzung des Parametervektors $\theta = (c, \beta, \sigma^2)$

- Für ein gegebenes ε_{t-1} ist Y_t wie folgt verteilt:

$$Y_t | \varepsilon_{t-1} \sim N(c + \beta\varepsilon_{t-1}, \sigma^2)$$

- Die bedingte Dichte beträgt somit:

$$f_{Y_t | \varepsilon_{t-1}}(y_t | \varepsilon_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - c - \beta\varepsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right]$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Wir treffen die Annahme, dass die Störgröße in Zeitpunkt $t=0$ ihrem Erwartungswert entspricht $\varepsilon_o = E(\varepsilon_o) = 0$

- Daraus folgt: $Y_1 | \varepsilon_0 \sim N(c, \sigma^2)$
 $\varepsilon_1 = y_1 - c$

- Die bedingte Dichte für Y_2 kann wie folgt geschrieben werden:

$$f_{Y_2|Y_1, \varepsilon_0}(y_2 | y_1, (\varepsilon_0 = 0), \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(y_2 - c - \beta\varepsilon_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Man kann jetzt auch den Wert für die Störgröße in Periode 2 bestimmen:

$$\varepsilon_2 = Y_2 - c - \beta\varepsilon_1$$

- Auf diese Art können wir unter der Annahme $\varepsilon_0 = 0$ die ganze Folge

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T\}$$

aus der beobachteten Zeitreihe ableiten

$$\varepsilon_t = y_t - c - \beta\varepsilon_{t-1}$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit kann jetzt für jede Realisation t mit folgender Gleichung dargestellt werden:

$$f_{Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1, (\varepsilon_0=0)}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, (\varepsilon_0=0); \theta) = f_{Y_t|\varepsilon_{t-1}}(y_t | \varepsilon_{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(Y_t - c - \beta\varepsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Die Likelihood Funktion der gesamten Zeitreihe ist somit das Produkt dieser bedingten Dichten

$$L(\theta) = f_{Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_1 | (\varepsilon_0=0)}(y_T, y_{T-1}, \dots, y_1 | (\varepsilon_0=0); \theta) = f_{Y_1 | (\varepsilon_0=0)}(y_1 | (\varepsilon_0=0); \theta) \prod_{t=2}^T f_{Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1 | (\varepsilon_0=0)}(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1, (\varepsilon_0=0); \theta)$$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Mit den entsprechenden Werten eingesetzt, lautet die **bedingte Likelihood Funktion**:

$$\ln L(\theta) = -T/2 \ln(2\pi) - T/2 \ln(\sigma^2) - \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

- Hierbei kann die Folge der ε_t iterativ berechnet werden:

$$\varepsilon_t = (y_t - c) - \beta^1 (y_{t-1} - c) + \dots + (-1)^{t-1} \beta^{t-1} (y_1 - c) + (-1)^t \beta^t \varepsilon_0$$

- Dieses Verfahren setzt voraus, dass $|\beta| < 1$

und somit der Einfluss der Annahme $\varepsilon_0 = 0$ rasch an Bedeutung verliert.

Die bedingte ML Schätzung ist dann eine gute Annäherung an die exakte ML Schätzung.

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Die Parameter c und β werden nun so gewählt, dass die bedingte Log-Likelihood Funktion maximiert wird.
- Die Maximierung stellt wieder ein nichtlineares Optimierungsproblem dar und muss mit Hilfe von numerischen Methoden gelöst werden.
- Eine Verallgemeinerung auf den MA(q)-Prozess ist leicht möglich, jedoch werden hier die ersten q Werte $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{-q+1}$ gleich Null gesetzt und daraus dann iterativ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ berechnet.

Schätzung von ARMA-Prozessen

ARMA(p,q)-Prozess

- Für den stochastischen Prozess

$$Y_t = c + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_t + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

mit $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ soll ein ML-Schätzung des Parametervektors $\theta = (c, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma^2)$ erfolgen.

Bedingter Likelihood Ansatz

- Die Approximation an die Likelihood Funktion erfolgte bei:
 - AR(p)-Prozessen durch die Bedingungen an die Anfangswerte $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1}$
 - MA(q)-Prozessen durch die Annahmen bezüglich der Störgrößen $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{-q+1}$
 - ARMA(p,q)-Prozesse sowohl auf $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1}$ als auch auf $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{-q+1}$

Schätzung von ARMA-Prozessen

- Wir können anhand dieser Annahmen die Störgröße für jeden Zeitpunkt t wie folgt bestimmen:

$$\varepsilon_t = Y_t - c - \alpha_1 Y_{t-1} - \dots - \alpha_p Y_{t-p} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Die bedingte Likelihood Funktion kann dann mittels der durch Rekursion gewonnenen Werte für ε_t bestimmt werden.

$$\ln L(\theta) = -T/2 \ln(2\pi) - T/2 \ln(\sigma^2) - \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

- Analog zur Bedingung $|\beta| < 1$ beim MA(1)-Prozess gilt beim ARMA(p,q)-Prozess, dass das Polynom $\beta_q(L)$ invertierbar sein muss, d.h. alle Wurzeln der Gleichung

$$1 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q = 0$$

müssen außerhalb des Einheitskreises liegen.

- Wenn diese Bedingung erfüllt ist, stellt die bedingte Methode eine gute Approximation für die exakte Likelihood Funktion dar.