

Zeitreihenökonomie

Kapitel 2 – Univariate Zeitreihenmodelle



Wichtige univariate Zeitreihenmodelle

- White Noise Prozess WN
- Moving Average Prozesse MA(q)
- Random Walk Prozess RW
- Autoregressive Prozesse AR(p)
- Autoregressive-Moving-Average Prozesse ARMA(p,q)

Wichtige Eigenschaften von Zeitreihenmodellen

	AR-Prozess	MA-Prozess	ARMA-Prozess
Modell für Y_t	$\alpha(L)Y_t = \varepsilon_t$	$\beta^{-1}(L)Y_t = \varepsilon_t$	$\beta^{-1}(L)\alpha(L)Y_t = \varepsilon_t$
Modell für ε_t	$Y_t = \alpha^{-1}(L)\varepsilon_t$	$Y_t = \beta(L)\varepsilon_t$	$Y_t = \alpha^{-1}(L)\beta(L)\varepsilon_t$
Stationaritätsbedingung	Wurzeln von $\alpha(L) = 0$ außerhalb des Einheitskreises	Immer stationär	Wurzeln von $\alpha(L) = 0$ außerhalb des Einheitskreises
Invertierbarkeitsbedingung	Immer invertierbar	Wurzeln von $\beta(L) = 0$ außerhalb des Einheitskreises	Wurzeln von $\beta(L) = 0$ außerhalb des Einheitskreises
AC-Funktion	Unendlich; gedämpft exponentielles Verhalten ($\alpha > 0$) oder gedämpfte Sinusschwingungen ($\alpha < 0$); Tails off	Endlich; Cut-off nach q Lags	Unendlich; gedämpft exponentielles Verhalten oder gedämpfte Sinusschwingungen nach den ersten q-p Lags; Tails off
PAC-Funktion	Endlich; Cut-off nach p Lags	Unendlich; dominiert durch gedämpft exponentielles Verhalten ($\beta < 0$) oder gedämpfte Sinusschwingungen ($\beta > 0$); Tails off	Unendlich; dominiert durch gedämpft exponentielles Verhalten oder gedämpfte Sinusschwingungen nach den ersten p-q Lags; Tails off

Moving Average Prozesse MA(q)

$$Y_t = c + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} = c + \beta_q(L) \varepsilon_t$$

$$\text{mit } \beta_q(L) = 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q \text{ und } \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

Eigenschaften:

- Ein endlicher MA-Prozess ist immer stationär (endliches Gedächtnis)
- Ein MA(q)-Prozess ist invertierbar, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (des charakteristischen Polynoms)

$$\left(1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q\right) = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen. Numerisch müssen sie dabei betragsmäßig größer eins sein.

- Der MA(q)-Prozess kann dann als AR(∞)-Prozess dargestellt werden.
- Die AC-Funktion bricht nach q-Lags ab
- Die PAC-Funktion zeigt gedämpft exponentielles Verhalten oder gedämpfte Sinusschwingungen.

Autoregressive Prozesse AR(p)

$$Y_t = c + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{oder}$$

$$\left(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p\right) Y_t = \alpha(L) Y_t = \varepsilon_t \quad \text{mit } \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

Eigenschaften:

- Ein AR-Prozess ist stationär, wenn die Wurzeln (Lösungen) der charakteristischen Gleichung (des charakteristischen Polynoms)

$$\left(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p\right) = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen. Numerisch müssen sie dabei betragsmäßig größer eins sein.

- Die AC-Funktion zeigt gedämpft exponentielles Verhalten oder gedämpfte Sinusschwingungen
- Die PAC-Funktion bricht nach p-Lags ab

Stabilitätsbedingung bei einem AR(2)-Prozess

$$Y_t = c + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Die Stabilitätsbedingung wird durch die Lösung der homogenen Differenzengleichung (des charakteristischen Polynoms) analysiert.
- Der Prozess soll so beschaffen sein, dass er, wenn in der aktuellen Periode kein Schock auftritt, tatsächlich zum Gleichgewicht tendiert.

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} \quad \text{bzw.} \quad (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) Y_t = 0 \quad \text{wenn} \quad \varepsilon_t = 0$$

$$1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 = 0 \quad L \text{ wird durch } z \text{ substituiert (da } L \text{ ein Operator ist)}$$

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0 \quad | :z^2$$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{\alpha_1}{z} - \alpha_2 = 0 \quad \left| \lambda = \frac{1}{z} \right.$$

$$\lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2}$$

- Der AR(2)-Prozess ist stabil, wenn λ_1 und λ_2 betragsmäßig kleiner als 1 sind.
- Vorsicht λ_1 und λ_2 sind nicht die Wurzeln des AR(2)-Prozesses! Das sind hier z_1 und z_2 .

Stabilitätsbedingung bei einem AR(2)-Prozess

- Für einen AR(2)-Prozess zeigen Box-Jenkins (1976), dass der Prozess stationär ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.) $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$

2.) $\alpha_2 - \alpha_1 < 1$

3.) $|\alpha_2| < 1$

- Bedingung 1.) und Bedingung 3.) gelten generell für alle AR-Prozesse.
- AR(p)-Prozesse können somit nur dann stationär sein, wenn die Summe ihrer Koeffizienten kleiner eins ist und der letzte Koeffizient des Polynoms betragsmäßig kleiner eins ist.
- Bedingung 2.) kann demgegenüber nicht ohne weiteres auf AR(p)-Prozesse verallgemeinert werden.

Stabilitätsbedingung bei einem AR(p)-Prozess

Der AR(p)-Prozess ist stationär, falls die Koeffizienten so beschaffen sind, dass alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung außerhalb des Einheitskreises liegen.

Es lässt sich dabei zeigen, dass eine

- notwendige Bedingung für Stationarität

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$$

und die

- hinreichende Bedingung für Stationarität

$$\sum_{i=1}^p |\alpha_i| < 1$$

lautet.

Stabilitätsbedingung bei einem AR(1)-Prozess - Gedankenexperiment

Ein dynamisches System wird als stationär bezeichnet, wenn eine Störung, die das System aus dem Gleichgewicht bewegt, im Laufe der Zeit abgebaut wird.

Gegeben sei eine Zeitreihe Y_t als Realisation eines AR(1) Prozesses, die sich im Zeitpunkt t_0 im Gleichgewicht befindet, d.h. $Y_0 = 0$. Im Zeitpunkt t_1 trifft ein Schock der Höhe $\varepsilon_1 = 1$ auf das System. Stationarität ist dann gegeben, wenn das dynamische System nach dem Schock wieder in das ursprüngliche Gleichgewicht zurück kommt.

Lösung des AR(1)-Prozesses durch Rückwärtssubstitution:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Es gilt: } \varepsilon_1 = 1$$

$$= \alpha_1 (\alpha_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Y_0 = 0$$

$$= \alpha_1^2 (\alpha_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = 0 \quad \forall \quad t > 1$$

$$= \alpha_1^t Y_0 + \alpha_1^{t-1} \varepsilon_1 + \alpha_1^{t-2} \varepsilon_2 + \dots + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha_1^{t-1}$$

$$Y_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} Y_0 \quad \text{für} \quad |\alpha_1| < 1$$

Stabilitätsbedingung bei einem AR(p)-Prozess

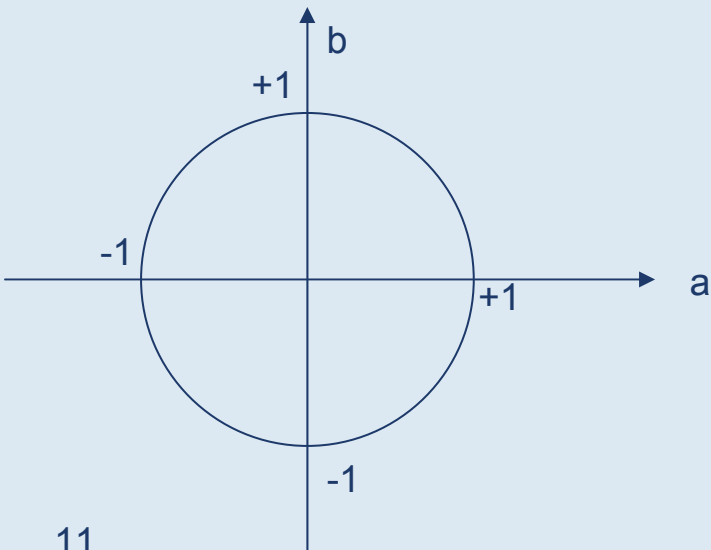
- Wenn in der aktuellen Periode t kein Schock auftritt tendiert ein stationärer AR(p)-Prozess tatsächlich zum Gleichgewicht.
- Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass auch komplexe Wurzeln im charakteristischen Polynom auftreten können, die Lösung für λ also neben einem reellen auch einen imaginären Teil aufweist, wird allgemein formuliert, dass ein AR(p)-Prozess genau dann stationär ist, wenn alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegen.
- Der Einheitskreis dient dabei zur Vereinfachung der Darstellung komplexer Zahlen.

Stabilitätsbedingung bei einem AR(p)-Prozess

- Es werden dazu sämtliche Lösungen des Polynoms $(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) = 0$

in die allgemeine Form $\lambda = a + bi$ transformiert, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, a den reellen Teil und b den imaginären Teil der Lösung darstellt.

- Im Einheitskreisdiagramm wird a auf der Abszisse abgetragen, so dass alle rein reellen Lösungen (für die der imaginäre Teil Null ist) Punkte auf dieser horizontalen Achse sind, während der imaginäre Teil auf der Ordinate gemessen wird.



Für Stationarität muss gelten: $|\lambda| < 1$

Dies impliziert folgende Bedingungen:

Für reelle Wurzeln: $|a| < 1$

Für komplexe Wurzeln: $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$

Der absolute Wert von z im Einheitskreisdiagramm wird als euklidische Distanz des entsprechenden Lösungspunktes vom Ursprung gemessen wird.

AC- und PAC-Funktion von AR(p)-Prozessen

- Die Autokovarianzfunktion Γ_j eines AR(p)-Prozesses zum Lag j hängt sowohl von den Parametern des Prozesses α_j als auch von den vorangegangenen Autokovarianzen ab.
- Die AC-Funktion ρ_j berechnet sich wieder mittels der Division durch die Varianz des Prozesses.

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \left| Y_{t-j} \quad \text{mit } j > 0 \right.$$

$$Y_t Y_{t-j} = \alpha_1 Y_{t-1} Y_{t-j} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} Y_{t-j} + \varepsilon_t Y_{t-j} \quad \left| \text{Erwartungswert bilden unter } E[Y_t] = 0 \right.$$

$$E[Y_t Y_{t-j}] = \alpha_1 E[Y_{t-1} Y_{t-j}] + \dots + \alpha_p E[Y_{t-p} Y_{t-j}] + E[\varepsilon_t Y_{t-j}] \quad \left| E[\varepsilon_t Y_{t-j}] = 0 \right.$$

$$\Gamma_j = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Gamma_{j-i}$$

$$\rho_j = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{j-i} \quad \text{mit} \quad \rho_j = \frac{\Gamma_j}{\Gamma_0}, \quad \rho_0 \equiv 1 \quad \text{und} \quad \Gamma_0 = \sigma^2$$

AC- und PAC-Funktion von AR(p)-Prozessen - Die Yule-Walker Gleichungen

- Die Gleichung $\rho_j = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{j-i}$ mit $\rho_0 \equiv 1$ wird auch als Yule-Walker Gleichung bezeichnet.
- In Matrixschreibweise lautet das System: $\rho = P\alpha$
- In den Yule-Walker Gleichungen sind die AC-Koeffizienten somit ausschließlich in Abhängigkeit der α -Koeffizienten des AR-Prozesses dargestellt. Die einzelnen Werte der Zeitreihe sind für die Berechnung nicht mehr notwendig.
- Die AC-Koeffizienten können mit Hilfe dieses Gleichungssystems bei bekannten Werten der α -Koeffizienten iterativ errechnet werden.
- Umgekehrt können aus den Yule-Walker Gleichungen auch die α -Koeffizienten des AR-Prozesses bestimmt werden, wenn die AC-Koeffizienten bekannt sind. Hierzu ist das System nach α zu lösen, indem man von links mit der Inversen von P multipliziert. $\alpha = P^{-1}\rho$
- Bezeichnen die α -Koeffizienten den wahren (unbekannten) Prozess, dann entsprechen die berechneten AC-Koeffizienten den theoretischen Werten. Sind die verwendeten α -Koeffizienten geschätzte Werte, so sind die AC-Koeffizienten als empirische Werte zu betrachten. Die Formeln bleiben jedoch unberührt.

AC- und PAC-Funktion von AR(p)-Prozessen - Die Yule-Walker Gleichungen

- Yule-Walker Gleichung für $p=2$:

$$\rho = P\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmung der theoretischen Autokorrelationsfunktion für den folgenden Prozess:

$$Y_t = 0,3Y_{t-1} + 0,04Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Aus den Yule-Walker-Gleichungen folgt für $\tau = 1, 2$:

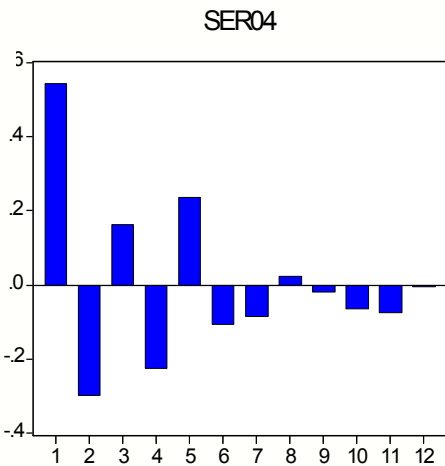
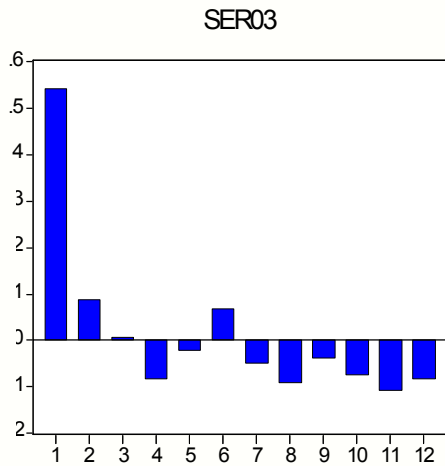
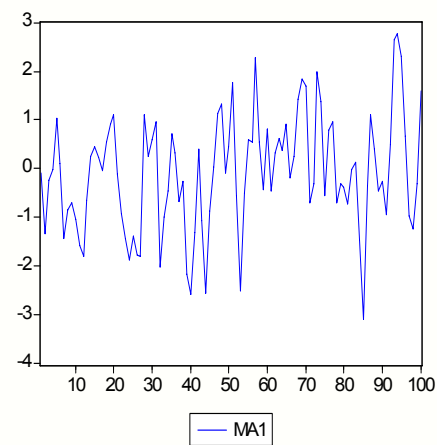
$$\rho_1 = 0,3 + 0,04\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{0,3}{0,96} = 0,3125$$

$$\rho_2 = 0,3\rho_1 + 0,04 = 0,3 \cdot 0,3125 + 0,04 = 0,13375$$

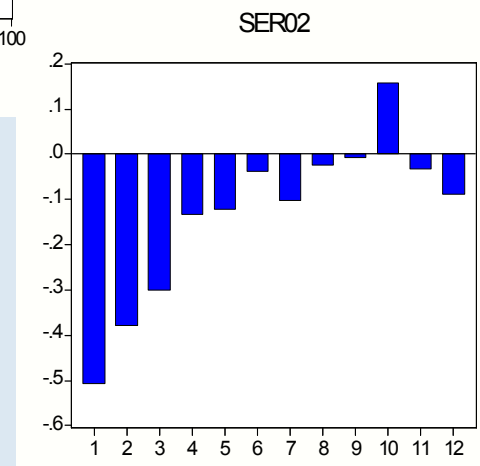
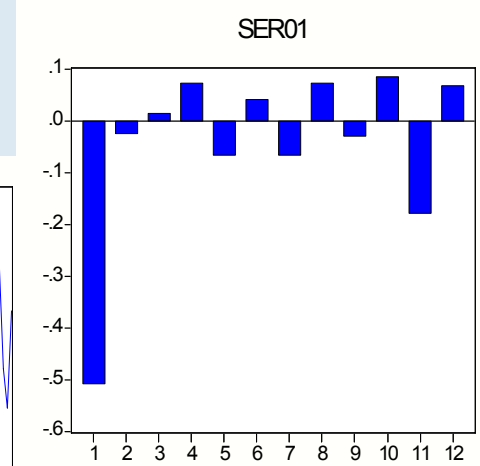
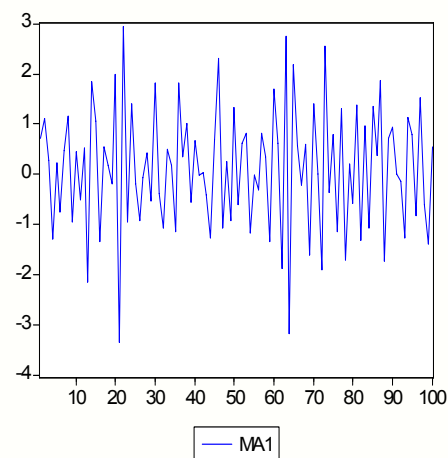
- Und damit sukzessive: $\rho_3 = 0,3\rho_2 + 0,04\rho_1 = 0,052625$, $\rho_4 = 0,3\rho_3 + 0,04\rho_2 = \dots$

Beispiele: AC- und PAC-Funktion von MA(1)-Prozessen

$$\beta_1 = 0.8$$



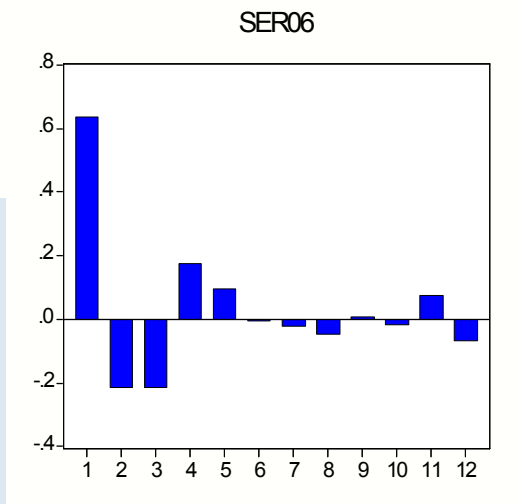
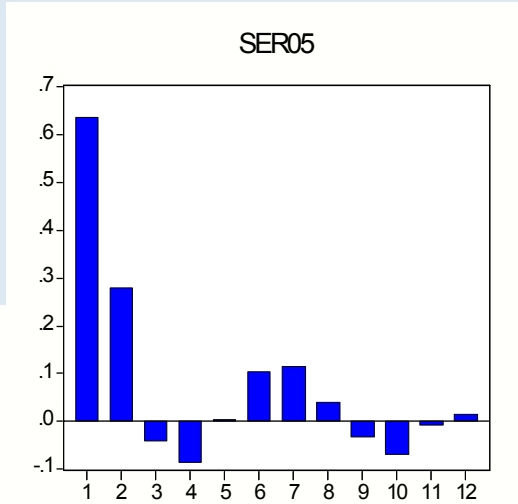
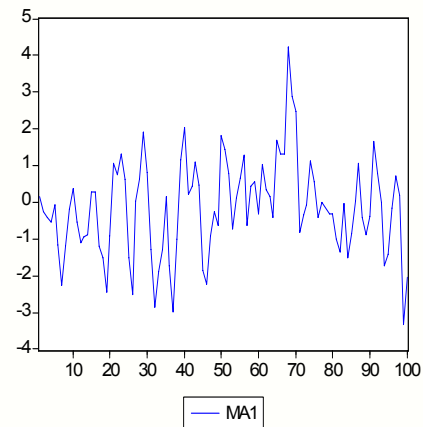
$$\beta_1 = -0.8$$



Beispiele: AC- und PAC-Funktion von MA(2)-Prozessen

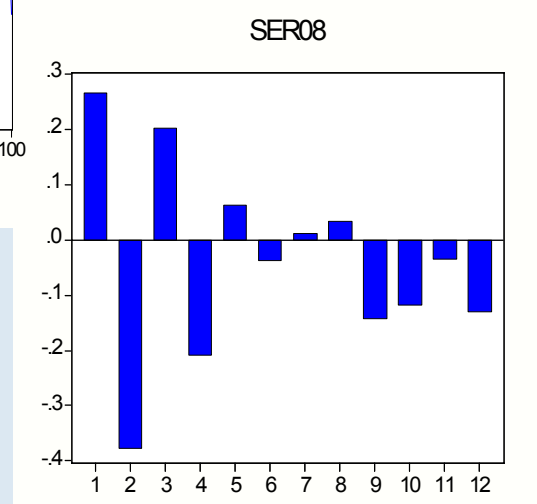
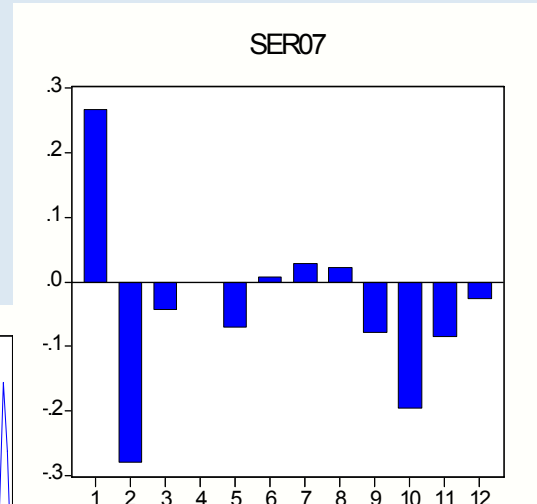
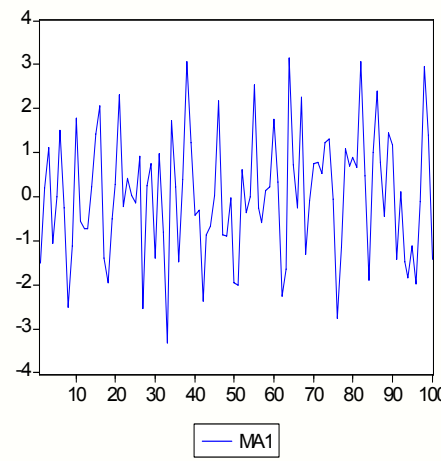
$$\beta_1 = 0.8$$

$$\beta_2 = 0.5$$



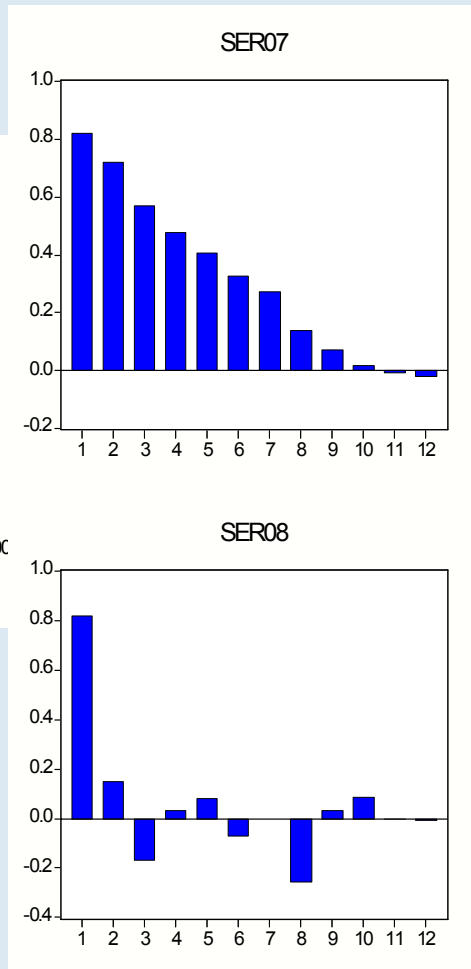
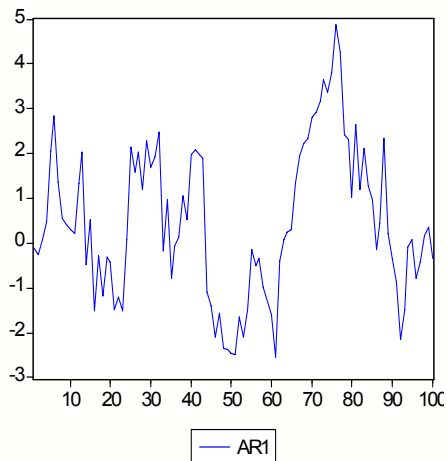
$$\beta_1 = 0.8$$

$$\beta_2 = -0.5$$

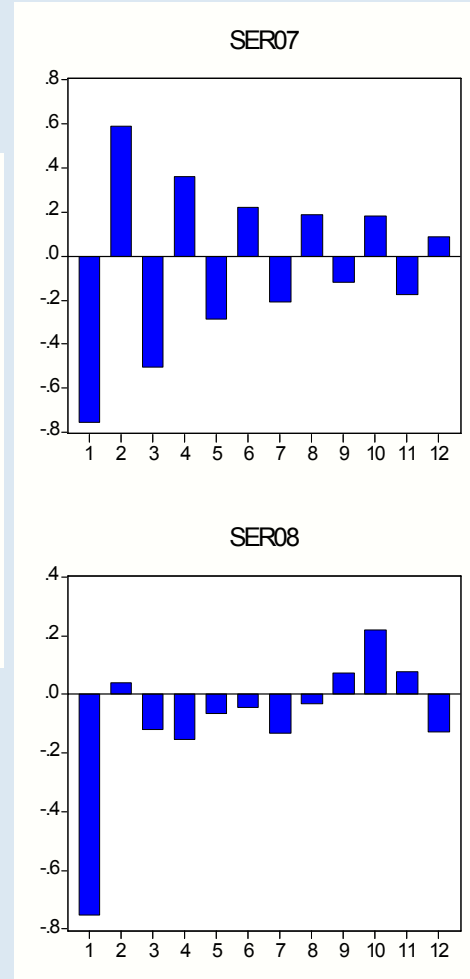
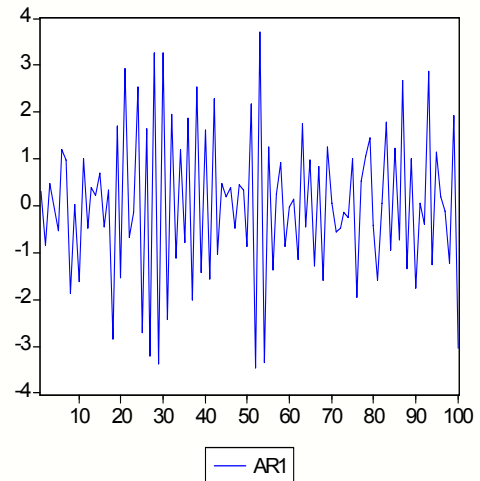


Beispiele: AC- und PAC-Funktion von AR(1)-Prozessen

$$\alpha_1 = 0.8$$



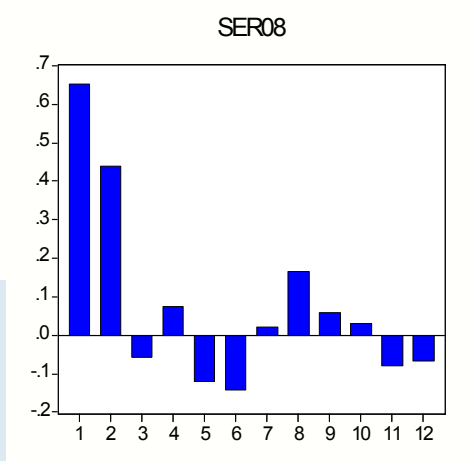
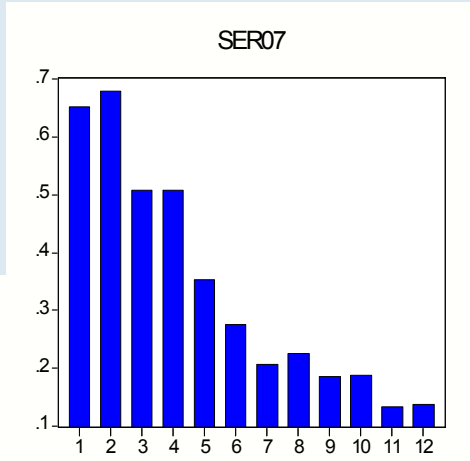
$$\alpha_1 = -0.8$$



Beispiele: AC- und PAC-Funktion von AR(2)-Prozessen

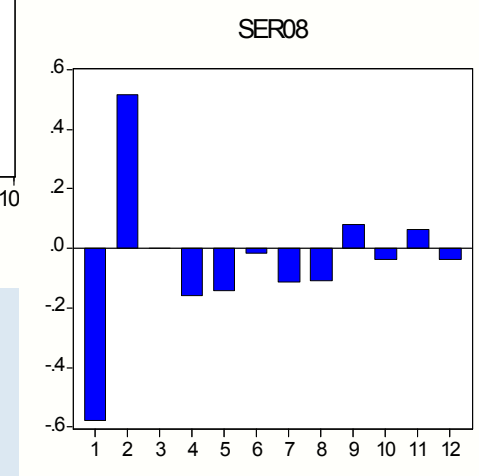
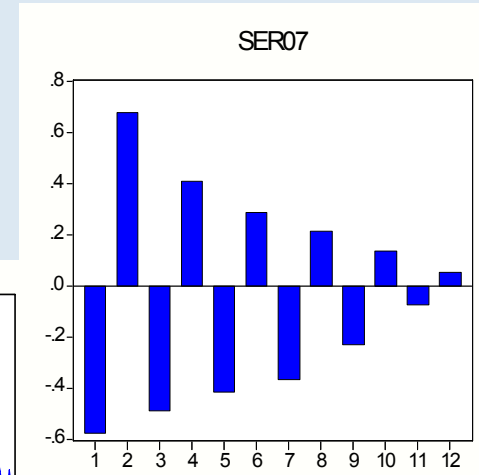
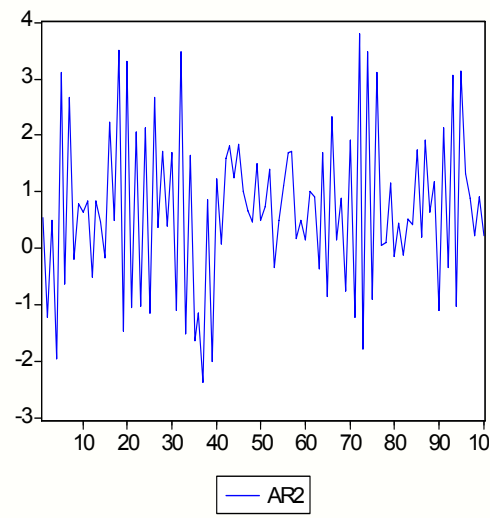
$$\alpha_1 = 0.6$$

$$\alpha_2 = 0.3$$



$$\alpha_1 = 0.6$$

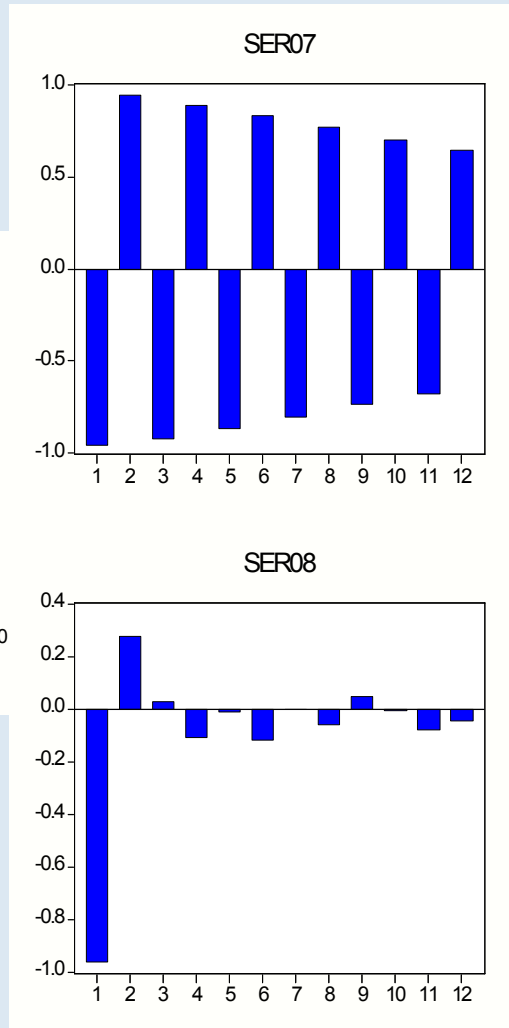
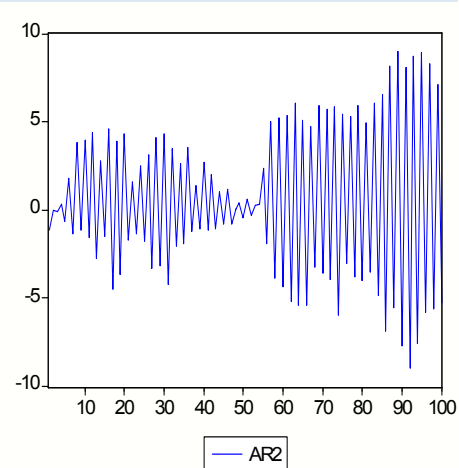
$$\alpha_2 = -0.3$$



Beispiele: AC- und PAC-Funktion von AR(2)-Prozessen

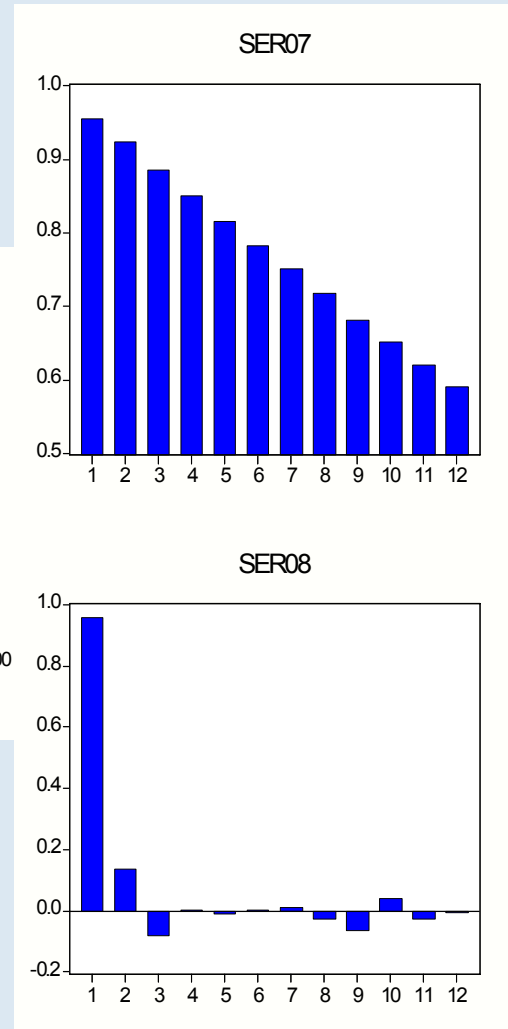
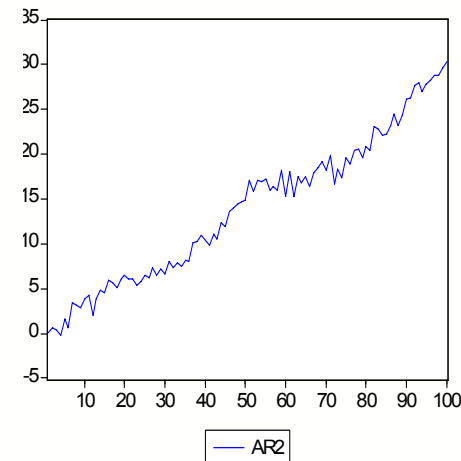
$$\alpha_1 = 0.6$$

$$\alpha_2 = -0.5$$



$$\alpha_1 = 0.6$$

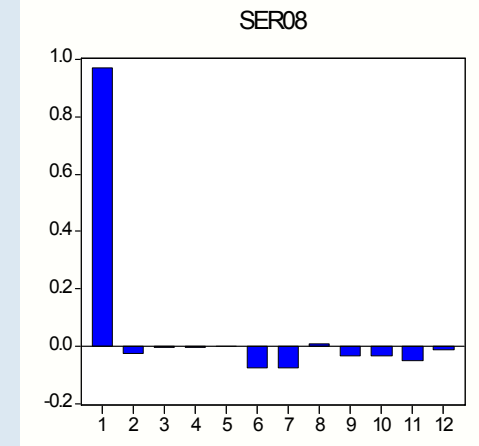
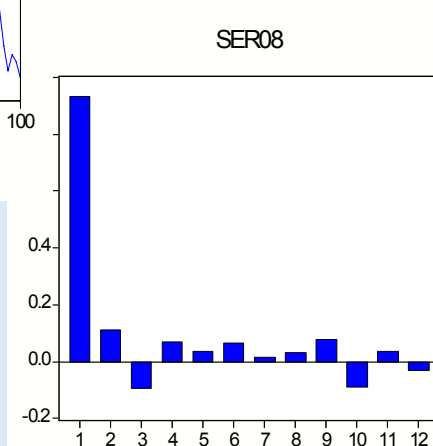
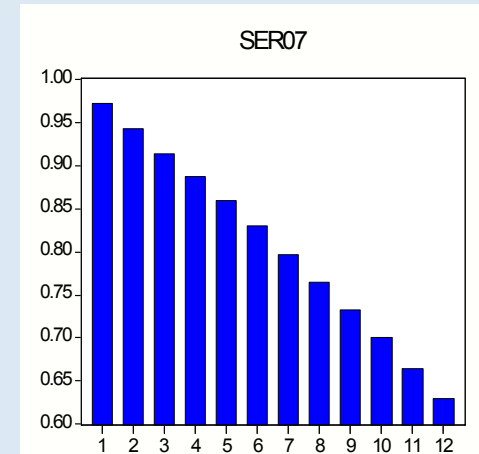
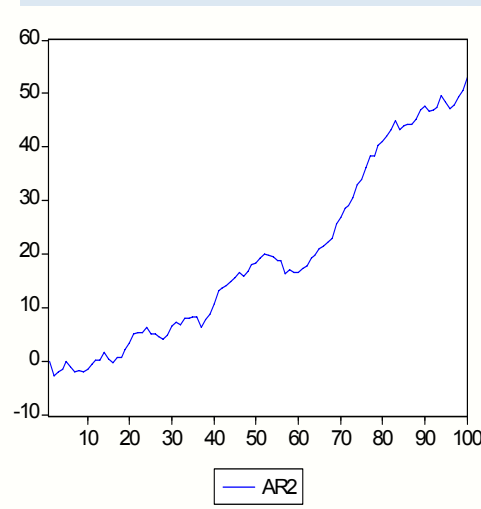
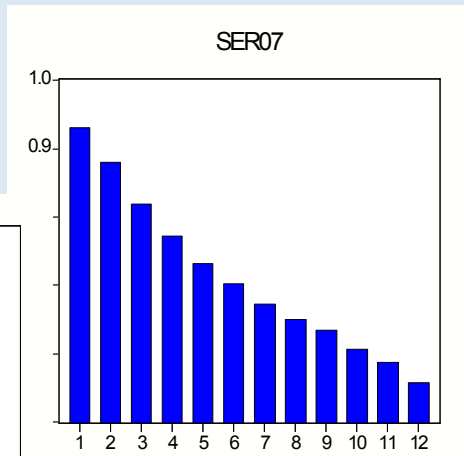
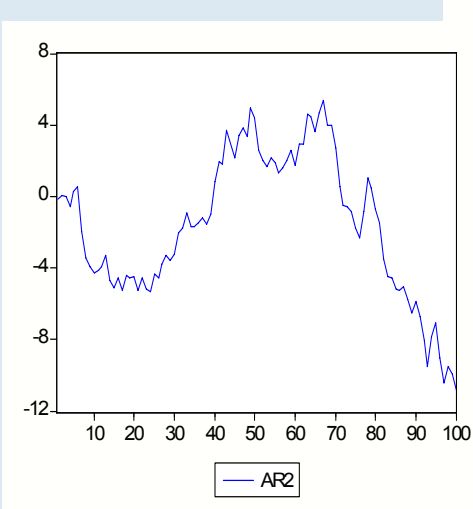
$$\alpha_2 = 0.5$$



Beispiele: Random Walk

Random Walk: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Random Walk mit drift: $Y_t = c + Y_{t-1} + \varepsilon_t$



ARMA(p,q)-Prozesse

- Stationarität: Ein endlicher AR(p)-Prozess kann durch einen unendlichen MA-Prozess approximiert werden.
- Invertierbarkeit: Ein endlicher MA(q)-Prozess kann durch einen unendlichen AR-Prozess approximiert werden.
- Aber: Beide Transformationen verletzen das Prinzip der sparsamen (parsimonious) Parametrisierung des zu schätzenden Modells.
- Spezifizierung eines Prozesses, der sowohl AR- als auch MA-Komponenten beinhaltet, gewährleistet zumeist eine sparsame Parametrisierung.

ARMA(p,q) mit Mittelwert $\mu = 0$:

$$\alpha(L)Y_t = \beta(L)\varepsilon_t$$

$$\text{mit } \alpha(L) = (1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) \quad \text{und} \quad \beta(L) = (1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q)$$

ARMA(p,q) mit Mittelwert $\mu \neq 0$:

$$\alpha(L)(Y_t - c) = \beta(L)\varepsilon_t$$

ARMA(p,q)-Prozesse

- Liegen alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms des AR-Teils

$$\left(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p\right) = 0$$

außerhalb des Einheitskreises, dann kann das ARMA(p,q)-Modell als unendlicher MA-Prozess geschrieben werden:

$$Y_t = \alpha(L)^{-1} \beta(L) \varepsilon_t$$

- Liegen alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms des MA-Teils

$$\left(1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q\right) = 0$$

außerhalb des Einheitskreises, dann kann das ARMA(p,q)-Modell als unendlicher AR-Prozess geschrieben werden:

$$\varepsilon_t = \beta(L)^{-1} \alpha(L) Y_t$$

- Der Prozess wird dann als stationärer bzw. invertierbarer ARMA(p,q)-Prozess bezeichnet.

ARMA(p,q)-Prozesse

- Unter diesen Bedingungen kann ein ARMA-Prozess folglich entweder durch einen endlichen MA-Prozess oder einen endlichen AR-Prozess approximiert werden, wobei die jeweilige Prozessordnung q oder p hinreichend groß gewählt werden muss.
- Der Preis dieser Approximationen zeigt sich in der großen Zahl der zu schätzenden Parameter, wodurch das Prinzip der sparsamen Modellspezifizierung verletzt wird.
- Es gilt: Bei vergleichbarer Qualität der Approximation kommen gemischte ARMA-Prozesse mit weniger Parametern aus als reine AR- oder MA-Prozesse.
- Auch bei ARMA(p,q)-Modellen dienen AC- und PAC-Funktion zur Beschreibung der Prozesseigenschaften.
- Da die formale Herleitung der AC-Funktion etwas umständlich ist, beschränken wir uns zunächst auf die Eigenschaften der Funktion.

AC- und PAC-Funktion von ARMA(p,q)-Prozessen

- Die ersten q AC-Koeffizienten $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$ hängen direkt von den q Koeffizienten des MA-Teils sowie den p Koeffizienten des AR-Teils ab.
- Diese Verknüpfung mit den Modellparametern erschwert die Identifikation eindeutiger Muster für die ersten q AC-Koeffizienten.
- Die p -Werte $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$ dienen als Startwerte der Differenzengleichung $\alpha(L)\rho_k = 0$, mit $k \geq q+1$. Sind diese Werte bestimmt, dann können die weiteren Werte der AC-Funktion rekursiv ermittelt werden.
- Ist $q - p < 0$, dann besteht die gesamte AC-Funktion aus einer Mischung gedämpft exponentieller Funktionen und/oder gedämpften Sinusschwingungen.
- Ist $q - p > 0$, dann folgen die ersten $q - p + 1$ AC-Koeffizienten nicht diesem Muster.
- Mit diesen Eigenschaften können gemischte Prozess identifiziert werden.
- Die Werte der PAC-Funktion eines ARMA-Prozesses verschwinden mit steigender Lag-Anzahl nicht. (!!)

AC-Funktion eines ARMA(1,1)-Prozesses

$$Y_t - \alpha Y_{t-1} = \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$$

- Der ARMA(1,1)-Prozess ist stationär, wenn $-1 < \alpha < 1$ erfüllt ist.
- Der ARMA(1,1)-Prozess ist invertierbar, wenn $-1 < \beta < 1$ erfüllt ist.
- Bezogen auf die AC-Koeffizienten lauten die Bedingungen dann:

$$|\rho_2| < |\rho_1| \quad \text{und} \quad \rho_2 > \rho_1(2\rho_1 + 1) \quad \text{für} \quad \rho_1 < 0$$

bzw.

$$\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 - 1) \quad \text{für} \quad \rho_1 > 0$$

AC-Funktion eines ARMA(1,1)-Prozesses

- Die AC-Funktion kann dann bestimmt werden als:

$$\tau = 1: \quad \rho_1 = \left[(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta) \right] / \left[(1 + \beta^2 - 2\alpha\beta)(\alpha - \beta) \right]$$

$$\tau = k: \quad \rho_k = \alpha\rho_{k-1}$$

- Die AC-Funktion nimmt nach dem Startwert ρ_1 exponentiell ab.
- Für $\alpha > 0$ verläuft die Abnahme glatt.
- Für $\alpha < 0$ beobachtet man eine oszillatorische Abnahme.
- Das Vorzeichen des Startwertes ρ_1 wird durch das Vorzeichen von $(\alpha - \beta)$ bestimmt.
- Für $\alpha - \beta > 0$ beginnt die Abnahme der AC-Funktion im positiven Bereich.
- Für $\alpha - \beta < 0$ beginnt die Abnahme der AC-Funktion im negativen Bereich.

PAC-Funktion eines ARMA(1,1)-Prozesses

- Die partielle Autokorrelationsfunktion des ARMA(1,1)-Prozesses beginnt mit einem Startwert $\alpha_{11} = \rho_1$, wobei α_{11} den PAC-Koeffizienten zum Lag $j=1$ beschreibt.
- Im Weiteren verläuft die PAC-Funktion des ARMA(1,1)-Prozesses analog zur PAC-Funktion eines reinen MA(1)-Prozesses. Sie wird dabei von gedämpft exponentiellem Verhalten dominiert.
- Aufgrund des nicht eindeutigen Verlaufs der AC- und PAC-Funktionen gemischter ARMA-Prozesse ist eine eindeutige Identifikation des stochastischen Prozesses, der einer beobachteten Zeitreihe zu Grunde liegt, hier deutlich schwieriger als für den Fall reiner AR- oder MA-Prozesse.