4. „Cash-in-Advance“ Modell

Prof. Dr. Kai Carstensen
LMU und Ifo Institut

Kritik an der Modellierung im MIU-Modell

- Durch das Integrieren der Geldhaltung in die Nutzenfunktion wird der Anreiz, einen positiven Geldbetrag zu halten, buchstäblich vorgeschrieben
- Realistischer ist die Annahme, dass der Nutzen der Geldhaltung u.a. darin besteht, Transaktionen zu erleichtern

„Cash-in-Advance“ Modell (CIA-Modell)

- Geld erzeugt indirekt einen Nutzengewinn durch Reduzierung der Zeit-/Such- und Tauschkosten für Güter und Dienstleistungen
- Entwickelt wurde das CIA-Modell von Clower (1967) und formalisiert von Grandmnount and Younes (1972) sowie Lucas (1980)
- Im CIA-Modell müssen Agenten Bargeld halten um Konsumgüter erwerben zu können
- Zwar ist auch diese Annahme sehr stark und weist Geld vorab eine besondere Rolle zu, allerdings ist der Weg wie dies erreicht wird, ein anderer als im MIU-Modell

Die Nutzenfunktion und das Optimierungs-problem der Haushalte

Die Nutzenfunktion der Periode t lautet:

$$u(c_t, n_t) = \frac{c_t^{1-\Phi}}{1-\Phi} + \Psi \frac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta}$$

es gilt: $\eta, \Psi, \Phi > 0$

Das Nutzenmaximierungsproblem:

$$\max E_0 [\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, n_t)]$$

unter der Nebenbedingung

$$y_t + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{\pi_t} = c_t + k_t + b_t + m_t$$

Aggregierte Budget-Restriktion des Haushalts-Sektors
der Ökonomie in realen Einheiten

Bedeutung der Parameter

β : subjektive Zeitdiskontierungsrate

c_t : Konsumniveau des repräsentativen Haushaltes

Φ : Koeffizient der relativen Risikoaversion

$1\text{-}n_t$: Freizeit bei einer Zeitausstattung von 1 und dem Arbeitsangebot n_t

η : Inverse der intertemporalen Substitutionselastizität von Freizeit

y_t : Aggregierter Output

Bedeutung der Parameter

τ_t : Pauschaltransfers oder Steuern (wenn negativ)

δ : Abschreibungsrate des Kapitals

k_t : Kapitalstock

i_t : Nominaler Zinssatz

$\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$: Inflationsfaktor in t

$b_t = \frac{B_t}{P_t}$: Realer Bondwert am Ende der Periode t

$m_t = \frac{M_t}{P_t}$: Reale Geldmenge am Ende der Periode t

Weitere charakteristische Gleichungen der Volkswirtschaft

Produktionsfunktion

$$y_t = e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$$

Produktivitätsschock

$$z_t = \rho z_{t-1} + e_t$$

(reales) Geldangebot

$$m_{t+1} = \frac{\theta_t}{\pi_t} m_t$$

Geldmengenschock

$$u_t = \gamma u_{t-1} + \phi z_{t-1} + \varepsilon_t$$

e_t und ε_t: Seriell unkorreliert und mit Erwartungswert 0

Die Cash-In-Advance Bedingung (1)

- Die Agenten sehen sich zusätzlich einer Finanzrestriktion konfrontiert. Der Konsum in Periode t darf nicht den Bargeldbestand aus der Vorperiode zuzüglich der realen Transfers (bzw. abzüglich Steuern) überschreiten:

$$c_t \leq \frac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t$$

- In unserem Modell öffnet der Gütermarkt vor dem Assetmarkt (vgl. Svensson 1985), d.h. die Haushalte entscheiden in jeder Periode wie viel Bargeld sie zurückhalten wollen für den Konsum in der nächsten Periode

Die Cash-In-Advance Bedingung (2)

- Aufgrund eines möglichen Produktivitäts- oder Geldmengenschocks in der nächsten Periode, müssen die Agenten abwägen zwischen dem Halten von mehr Liquidität als notwendig um ihre Ausgaben zu decken oder dem möglichen Verzicht des gewünschten Konsums
- Konsum wird daher auch als „Cash-good" bezeichnet, während Freizeit und Investitionen „Credit-goods" darstellen

Die Cash-In-Advance Bedingung (3)

- In unserem Modell mit der Ungewissheit über zukünftige Schocks, kann bspw. ein negativer Produktivitätsschock zu geringerem Einkommen führen
- Dies hat weniger Konsum zur Folge und damit eine nicht bindende CIA-Bedingung, da der Haushalt seinen realen Geldbestand bereits in Periode t-1 gewählt hat.

Die Lagrangefunktion

$$L(c_t, n_t, m_t, b_t, k_t, \lambda_t, \mu_t) =$$

$$E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\Phi}}{1-\Phi} + \Psi \frac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta} \right.\right.$$

$$+ \lambda_t \left(e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + \tau_t + (1-\delta) k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1}) b_{t-1}}{\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{\pi_t} - c_t - k_t - b_t - m_t \right)$$

$$\left.\left. + \mu_t \left(\frac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t - c_t \right) \right] \right\}$$

Die Bedingungen erster Ordnung (FOCs) (1)

$$(1)\quad \frac{\partial L}{\partial c_t} = c_t^{-\Phi} - \lambda_t - \mu_t \equiv 0$$

$$(2)\quad \frac{\partial L}{\partial n_t} = \Psi \frac{(1-\eta)(1-n_t)^{-\eta}(-1)}{(1-\eta)} + \lambda_t (1-\alpha) e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{-\alpha} \equiv 0$$

$$(3)\quad \frac{\partial L}{\partial m_t} = \beta^{t+1} E_t \left[\lambda_{t+1} \frac{1}{\pi_{t+1}} \right] - \beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} E_t \left[\mu_{t+1} \frac{1}{\pi_{t+1}} \right] \equiv 0$$

$$(4)\quad \frac{\partial L}{\partial b_t} = \beta^{t+1} E_t \left[\lambda_{t+1} \frac{1+i_t}{\pi_{t+1}} \right] - \beta^t \lambda_t \equiv 0$$

Die Bedingungen erster Ordnung (FOCs) (2)

$$(5)\ \frac{\partial L}{\partial k_t} = \beta^{t+1} E_t\left[\lambda_{t+1}(\alpha e^{z_{t+1}} k_t^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta))\right] + \beta^t(-\lambda_t) \equiv 0$$

$$(6)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{\pi_t} - c_t - k_t - b_t - m_t \equiv 0$$

$$(7)\ \frac{\partial L}{\partial \mu_t} = \frac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t - c_t \geq 0$$

Vereinfachung der FOCs (1)

(a) Im Folgenden wird angenommen, dass die Fisher-Gleichung gilt:

$$R_t = \frac{I_t}{E_t(\pi_{t+1})}$$

mit: $E_t(\pi_{t+1})$ ... als erwarteter Inflationsfaktor

$I_t = 1 + i_t$ ... als der Nominalzinsfaktor

$R_t = 1 + r_t$ ... als der Realzinsfaktor

(b) mit: $y_t = e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$

lassen sich die FOCs vereinfachen zu...

Vereinfachung der FOCs (2)

$$(1')\ c_t^{-\Phi} = \lambda_t + \mu_t$$

$$(2')\ \Psi(1-n_t)^{-\eta} = (1-\alpha)\lambda_t \frac{y_t}{n_t}$$

$$(3')\ \lambda_t = E_t\left[\frac{\beta}{\pi_{t+1}}\left(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1}\right)\right]$$

$$(4')\ \lambda_t = \beta E_t\left[\lambda_{t+1} R_t\right]$$

$$(5')\ \lambda_t = \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\left(\alpha\frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta\right)\right]$$

$$(6')\ e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{I_{t-1}b_{t-1}}{\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{\pi_t} = c_t + k_t + b_t + m_t$$

$$(7')\ c_t \le \frac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t$$

Der Steady State (Annahmen) (1)

Analog zum MIU-Modell gilt im Steady State:

(a) Konstante Geldhaltung Pro-Kopf, d.h. Geldmenge und Preise ändern sich um dieselbe Rate

$$m_{t+1} = m_t = m: \qquad m_t = \frac{\theta_t}{\pi_t} m_{t-1} \Rightarrow m = \frac{\theta_t}{\pi_t} m \Rightarrow \pi = \theta$$

(b) Aggregierte Kreditaufnahme oder Kreditgewährung gibt es nicht

$$b_t = 0$$

Der Steady State (Annahmen) (2)

(c) Der nominale Geldbestand verändert sich im Steady State durch staatliche Transfers oder Steuern mit nicht verzerrender Wirkung (lump-sum transfers/ taxes). Somit gleicht das reale Geldmengenwachstum den realen Transfers/ Steuern

$$\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = T_t \;\Rightarrow\; \frac{m_t - m_{t-1}}{\pi_t} = \tau_t$$

Setze: $m_t = \dfrac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t$

aus (7') $c_t \leq \dfrac{m_{t-1}}{\pi_t} + \tau_t \Rightarrow c_t \leq m_t$

Der Steady State (Annahmen) (3)

Solange positive nominale Zinssätze vorherrschen wird die CIA-Bedingung für den Agenten bindend sein:

- Hätte der repräsentative Haushalt einen Liquiditätsüber-schuss, so bedeutet dies für ihn positive Opportunitäts-kosten aufgrund entgangener Zinsen. Solch ein Verhalten kann nicht Nutzen maximierend für den Agenten sein.
- Umgekehrt ist es nicht Nutzen maximierend, wenn der Haushalt zu wenig Bargeld vorhält und damit seinen Konsum einschränken muss.

$$(7'')\; c_t \leq m_t \;\Rightarrow c_t = m_t$$

Modellgleichungen im Steady State

(1.SS) $$c^{-\Phi} = \lambda + \mu$$

(2.SS) $$\Psi(1-n)^{-\eta} = (1-\alpha)\lambda \frac{y}{n}$$

(3.SS) $$\lambda = \frac{\beta}{\pi}(\lambda + \mu)$$

(4.SS) $$\frac{1}{\beta} = \frac{1+i}{\pi} = R$$

(5.SS) $$\frac{1}{\beta} = \alpha\left(\frac{y}{n}\right) + 1 - \delta$$

(6.SS) $$k = k^{\alpha} n^{1-\alpha} + (1-\delta)k + c$$

(7.SS) $$c = m$$

Übersicht der Steady State Werte

Herleitung der Steady State Werte erfolgt analog zum MIU-Modell

R	$\frac{y}{k}$	$\frac{c}{k}$	$\frac{m}{k}$	$\frac{n}{k}$
$\frac{1}{\beta}$	$\frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}$	$\frac{y}{k}-\delta$	$\frac{c}{k}$	$\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Tabelle: Steady State Werte

Gleichgewichtiges Arbeitsangebot (1)

- Lediglich m/k unterscheidet sich im Steady State. Dies hat zur Folge, dass keiner der Steady State Werte von der Wachstumsrate des nominalen Geldbestandes abhängt
- Dennoch beeinflusst das Geldmengenwachstum (und damit die Inflation) die reale Ökonomie über die Beschäftigung im Gleichgewicht

$$\frac{n^{\Phi}}{(1-n)^{\eta}} = \frac{1-\alpha}{\Psi}\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{\Phi-\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{c}{k}\right)^{-\Phi}$$

(Herleitung vgl.: Chapter 3 - Appendix in: Walsh (2003): *„Monetary Theory and Policy“*)

Gleichgewichtiges Arbeitsangebot (2)

- Inflation, hervorgerufen durch ein höheres Geldmengen-wachstum, wirkt hier wie eine Steuer auf den Konsum.
- Somit werden die Haushalte das Cash-Good (Konsum) durch Credit-Good (Freizeit) substituieren. Höhere Inflation führt also zu einer verstärkten Nachfrage von Freizeit und folglich zu geringerem Output, Konsum und weniger Kapitalstock

Zusammenfassung der Modellgleichungen (1)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \mathrm{c}_t^{-\Phi} = \lambda_t + \mu_t \Rightarrow \lambda_t = \mathrm{c}_t^{-\Phi} - \mu_t \Rightarrow \lambda_{t+1} = \mathrm{c}_{t+1}^{-\Phi} - \mu_{t+1} \\ \lambda_t = E_t\left[\dfrac{\beta}{\pi_{t+1}}\left(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1}\right)\right]\end{array}\right\} \lambda_t = \beta E_t\left[\frac{\mathrm{c}_{t+1}^{-\Phi}}{\pi_{t+1}}\right] = \beta E_t\left[\frac{\mathrm{m}_{t+1}^{-\Phi}}{\pi_{t+1}}\right]$$

$$(2)\ \Psi(1-n_t)^{-\eta} = (1-\alpha)\lambda_t \frac{y_t}{n_t}$$

$$(3)\ \lambda_t = \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\right] R_t$$

$$(5)\ R_t = \alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta$$

Zusammenfassung der Modellgleichungen (2)

$$(6)\ y_t + (1-\delta)k_{t-1} = c_t + k_t$$

$$(7)\ c_t = m_t$$

$$(8)\ R_t = \frac{I_t}{E_t \pi_{t+1}}$$

$$(9)\ m_t = \frac{\theta_t}{\pi_t} m_{t\text{-}1}$$

Log-linearisierte Gleichungen (1)

Zur Vereinfachung definiere: $\xi_1 = 1 + \frac{\eta(1-\eta)}{n}$

(1*) $\hat{k}_t = (1-\delta)\hat{k}_{t-1} + \left(\frac{y}{k}\right)\hat{y}_t - \left(\frac{c}{k}\right)\hat{c}_t$

(2*) $\hat{y}_t = \alpha \hat{k}_{t-1} + (1-\alpha)\hat{n}_t + \hat{Z}_t$

(3*) $\hat{R}_t = \alpha\beta\left(\frac{y}{k}\right)\left(E_t \hat{y}_{t+1} - \hat{k}_t\right)$

(4*) $\hat{\lambda}_t = -E_t\left[\Phi \hat{c}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}\right]$

Log-linearisierte Gleichungen (2)

(5*) $\xi_1 \hat{n}_t = \hat{y}_t + \hat{\lambda}_t$

(6*) $\hat{\lambda}_t = E_t \hat{\lambda}_{t+1} + \hat{R}_t$

(7*) $\hat{R}_t = \hat{I}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}$

(8*) $\hat{m}_t = \hat{m}_{t-1} - \hat{\pi}_t + \frac{1}{\theta} u_t$

(9*) $\hat{c}_t = \hat{m}_t$

Log-linearisierte Gleichungen (Bemerkungen)

- Die Gleichung (4*) spiegelt die Rolle der Inflation als Preisaufschlag des Konsums wieder

$$\hat{\lambda}_t = -E_t\left[\Phi \hat{c}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}\right]$$

- Die Gleichungen (4*),(5*) und (8*) implizieren

$$\lambda_t = -E_t\left[\hat{m}_{t+1} + \hat{\pi}_{t+1}\right] = -\left(m_t + \frac{1}{\theta}E_t u_{t+1}\right) = \left(1 + \eta\frac{n}{1-n}\right)\hat{n}_t - \hat{y}_t$$

(Vgl. Walsh (2003))

- Damit weisen die realen Größen ($\hat{y}, \hat{m}(\hat{c}), \hat{n}$) eine Abhängigkeit in der kurzen Frist vom nominalen Geldangebot auf. Eine Veränderung in $E_t u_{t+1}$ muss ausgeglichen werden durch an entsprechende Anpassung von mindestens einer dieser Größen

Kalibrierung des Modells

Tabelle: Basis Werte

α	δ	β	η	a	b	θ	ρ	Ψ	σ_e	σ_ε
0.36	0.019	0.989	1	0.95	2.56	1.0125	0.95	1.555	0.007	0.0089

ψ wurde so gewählt, so dass wir aus folgender Beziehung das langfristige Beschäftigungsniveau von 0,31 erhalten:

$$\frac{n^{\Phi}}{(1-n)^{\eta}} = \frac{1-\alpha}{\Psi}\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{\Phi-\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{c}{k}\right)^{-\Phi}$$

Steady State Werte

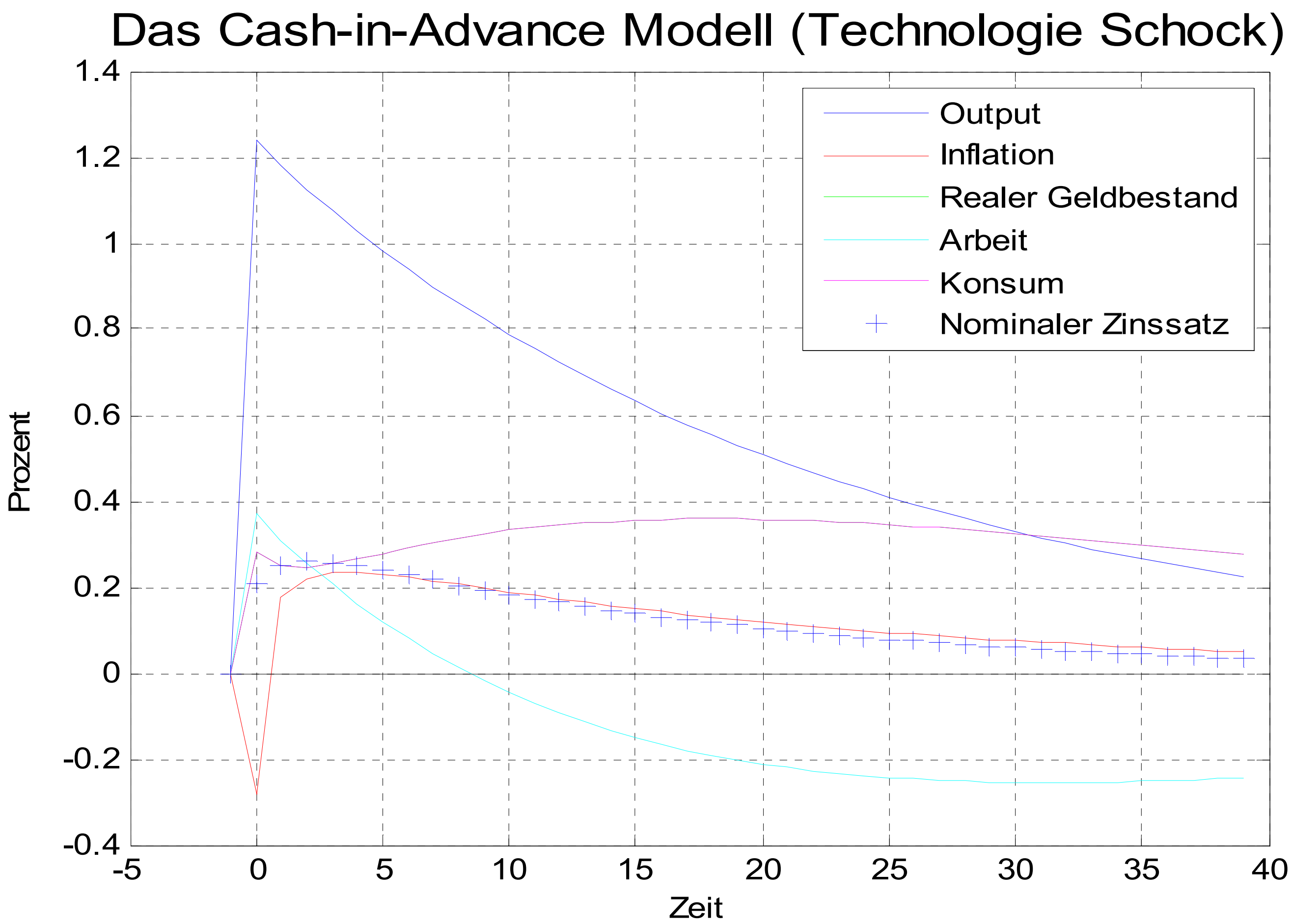
Tabelle: Basiswerte der Parameter

R	$\frac{y}{k}$	$\frac{c}{k}$	$\frac{m}{k}$	$\frac{n}{k}$
1.011	0.084	0.065	0.065	0.021

Tabelle: Variablen

k	y	c	m	n
16.082	1.346	1.040	1.040	1/3

Auswirkungen eines Technologieschocks mit Erweiterung der Geldmenge (1)

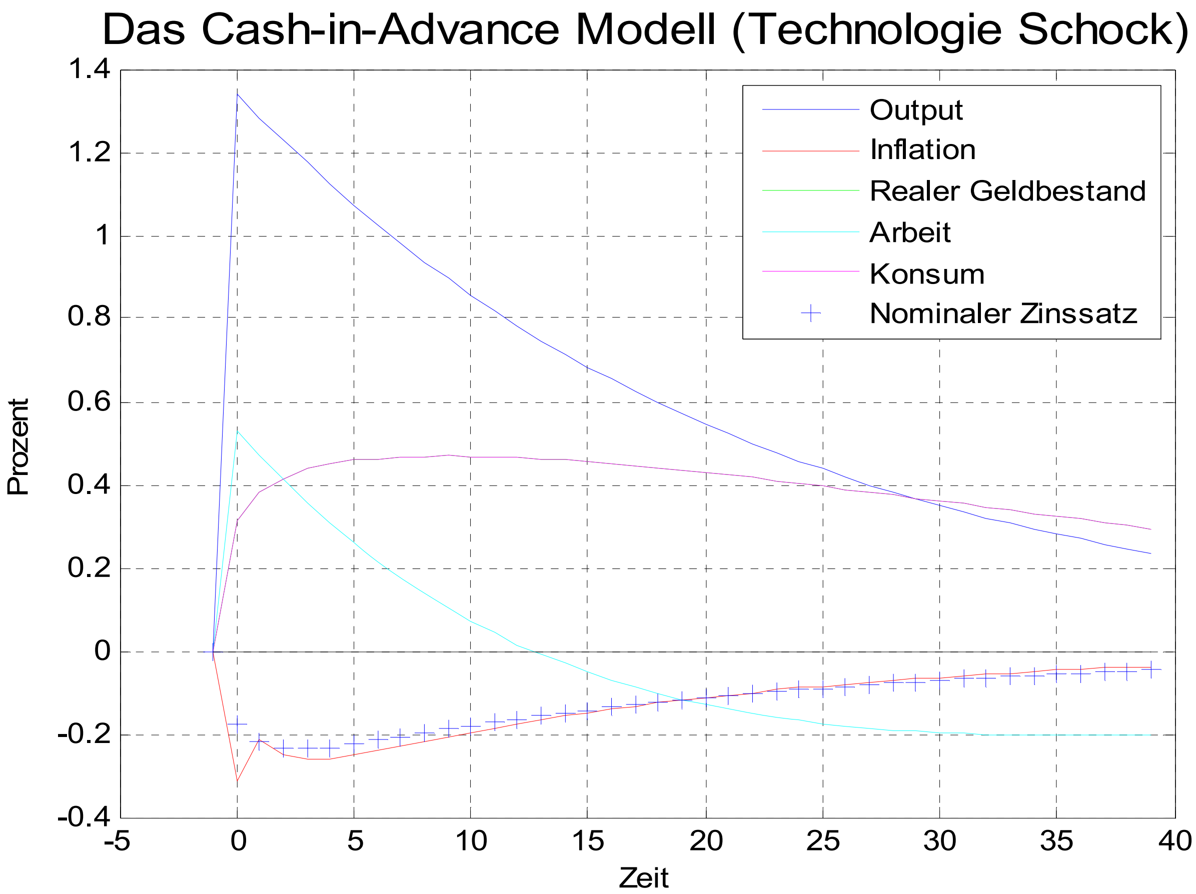


Für die Parameterwerte: ϕ=0.15, γ=0.5 und Φ=2

Auswirkungen eines Technologieschocks mit Erweiterung der Geldmenge (2)

- Eine Ausweitung der Geldmenge in Folge eines positiven Technologieschocks bewirkt, dass die Inflationserwartungen steigen und nach einem anfänglich erhöhten Arbeitsangebot eine Substitution hin zur Freizeit stattfindet
- Die realen Variabeln zeigen deutlich stärkere Reaktionen auf das Zusammenspiel von Geld- und Technologieschock als beim MIU-Modell

Auswirkungen eines Technologieschocks mit Reduzierung der Geldmenge (1)

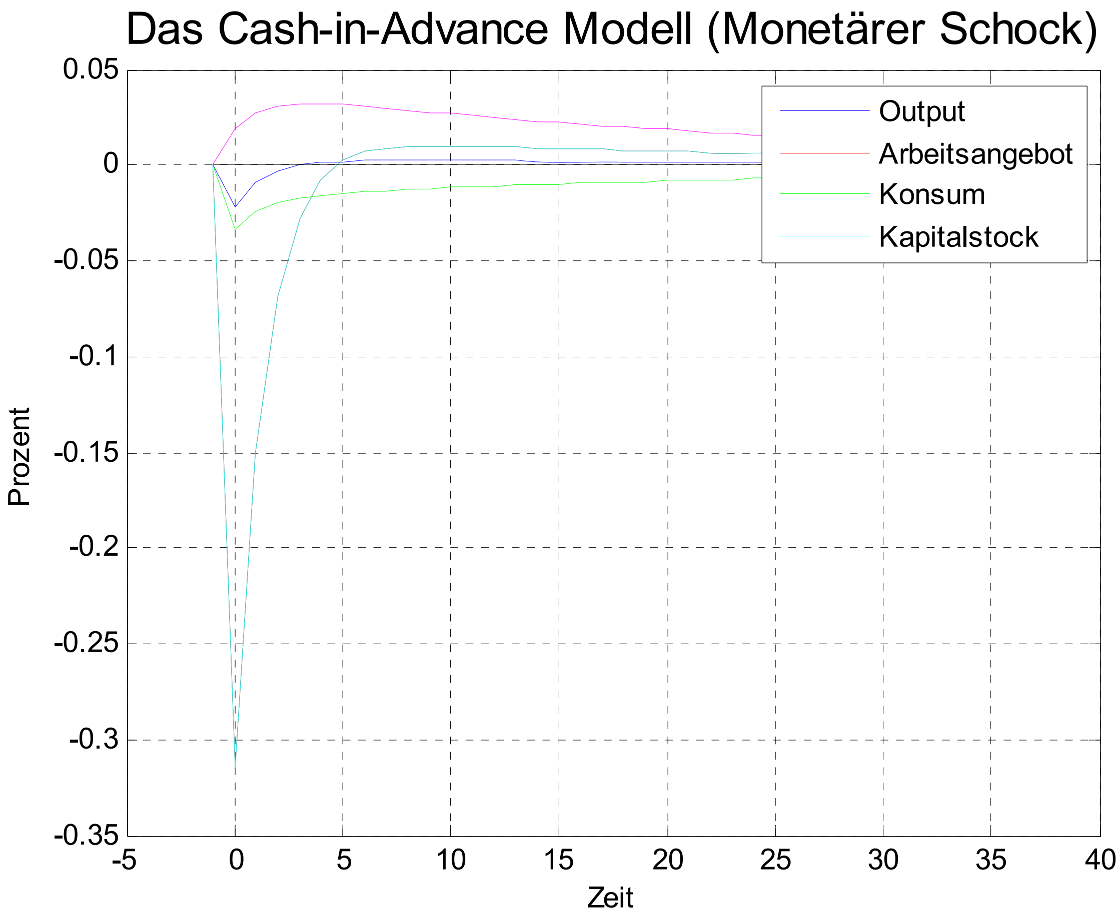


Für die Parameterwerte: ϕ=-0.15, γ=0.5 und Φ=2

Auswirkungen eines Technologieschocks mit Reduzierung der Geldmenge (2)

- Eine Reduzierung der Geldmenge in Folge eines positiven Technologieschocks bewirkt, dass die Inflationserwartungen fallen und das anfänglich erhöhte Arbeitsangebot sich nur langsam abbaut.
- Die realen Variabeln zeigen eine höhere Volatilität als im Fall einer Erhöhung der Geldmenge

Auswirkungen eines Geldschocks (1)

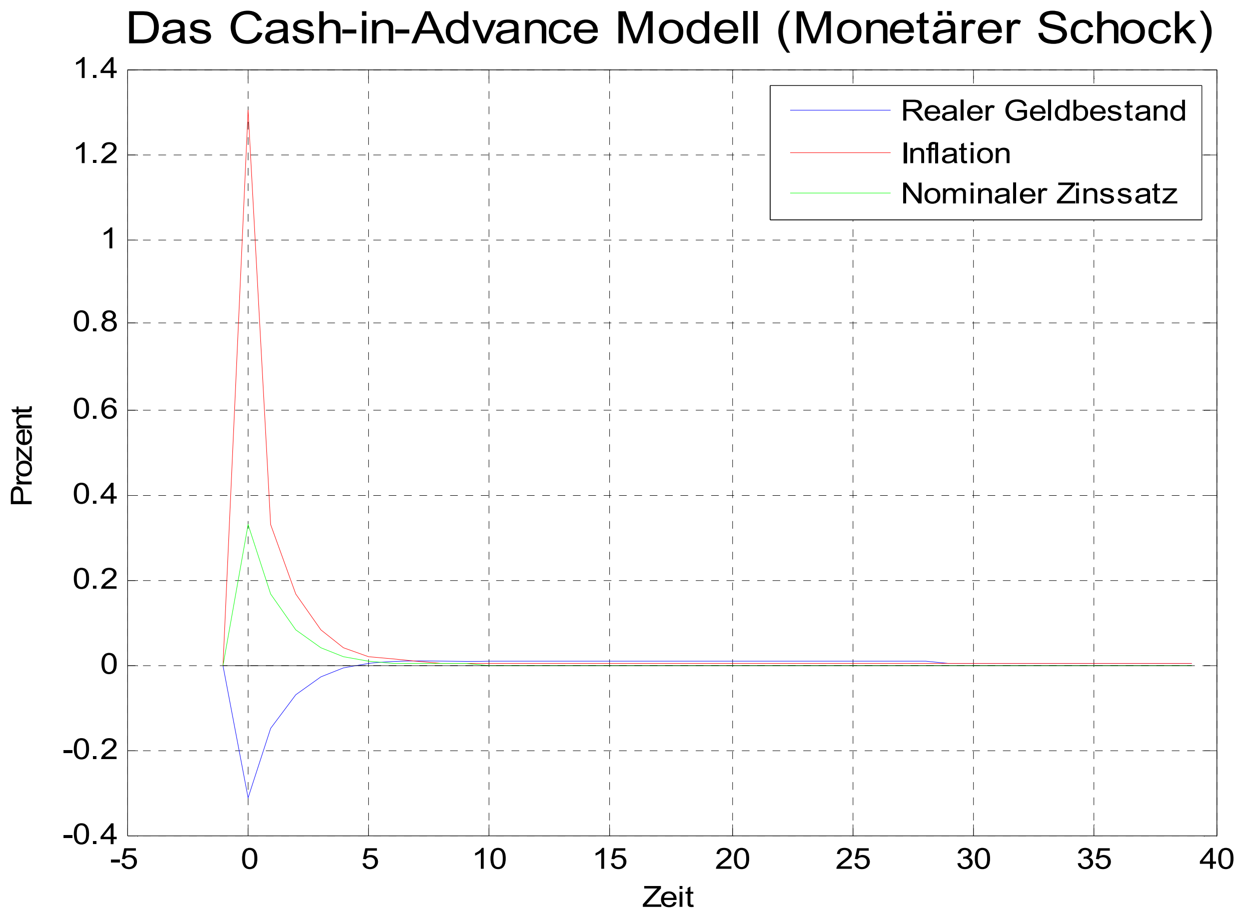


Für die Parameterwerte: ϕ=0.15, γ=0.5 und Φ=2

Auswirkungen eines Geldschocks (2)

- Geringe Reaktion der realen Variablen auf einen Geldschock, jedoch stärker als beim MIU Modell
- Positiver Geldschock bewirkt eine Reduktion von Output und Konsum (die Empirie zeigt anderes)

Auswirkungen eines Geldschocks (3)



Für die Parameterwerte: ϕ=0.15, γ=0.5 und Φ=2

Auswirkungen eines Geldschocks (4)

- Nominaler Zinssatz steigt in Folge einer Geldmengen-erweiterung (nicht empirisch zu finden!!!)
- Die Inflation steigt stärker an als die Geldmenge, da die Inflationserwartung aufgrund der positiven Autokorrelation in der Geldmengengleichung ansteigen