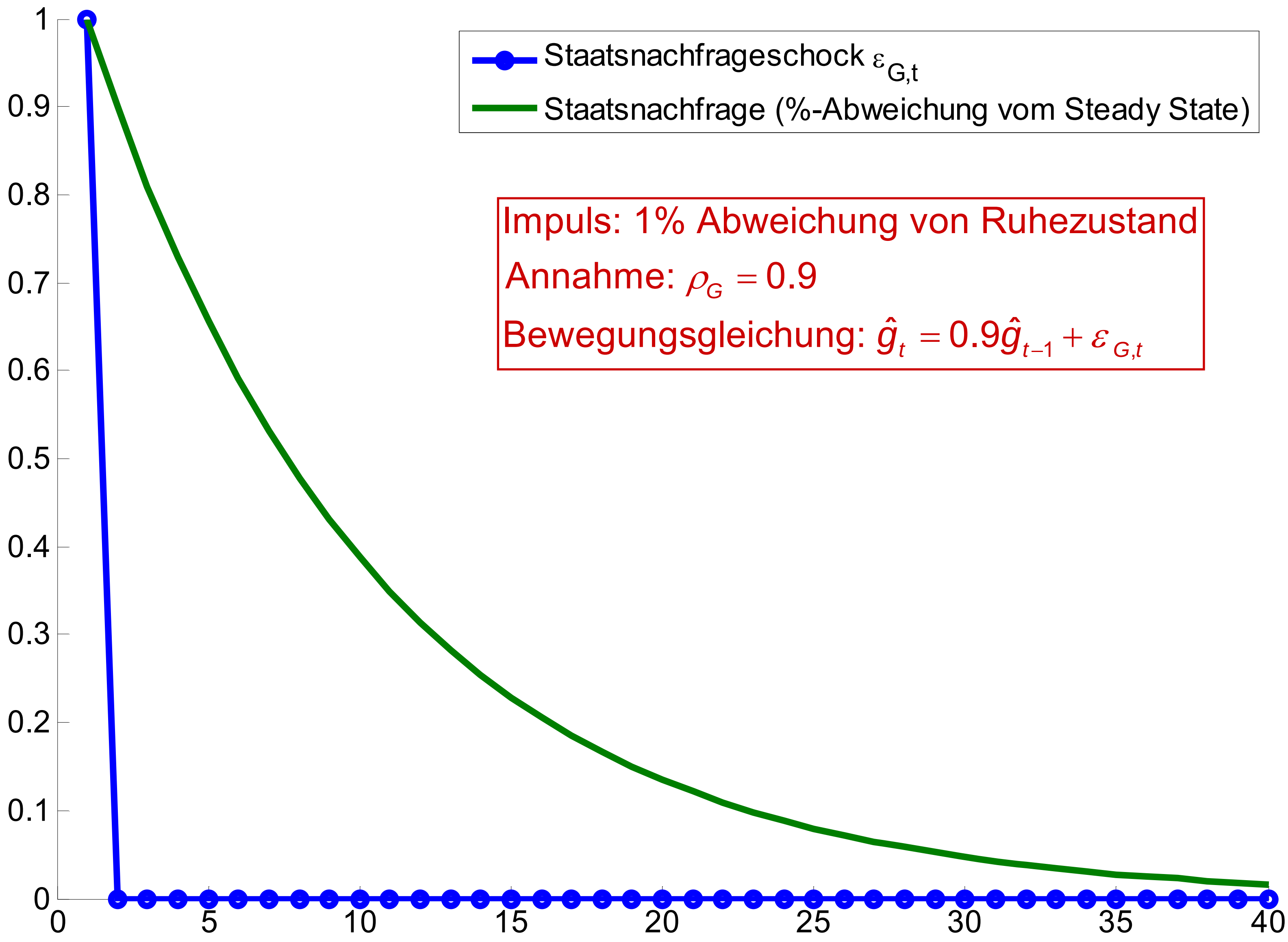
2. Reale Konjunkturtheorie Teil 3

Prof. Dr. Kai Carstensen
LMU und Ifo Institut

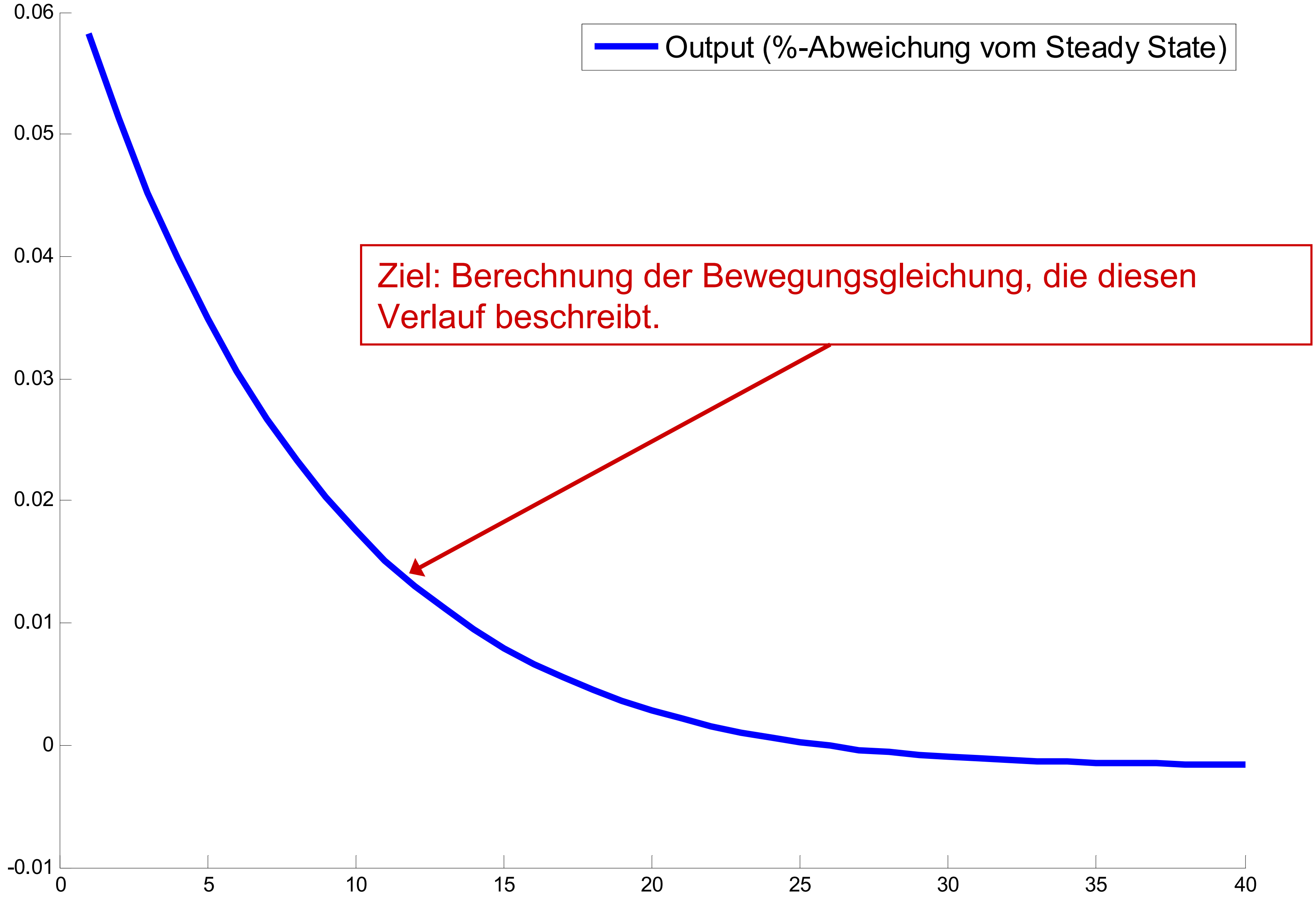
4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(a) Zielsetzung

- Berechnung des zeitlichen Verlaufs der Modellvariablen nach einem Schock, z.B. nach einem einmaligen Staatsausgabenimpuls („Konjunkturprogramm“)
- Staatsausgabenimpuls = Abweichung der Staatsausgaben vom Normalzustand $\bar{G}$
- Ausgangslage in Periode 0: Steady State
- Impuls in Periode 1: $\varepsilon_{G,1} = 1, \quad \varepsilon_{G,2} = \varepsilon_{G,3} = \cdots = 0$
- Reaktion der Variablen (Output, Konsum etc) in Perioden 1, 2, 3, ... und allmähliche Rückkehr ins Steady State
- Für jede Variable: Impulsantwortfolge, d.h. Reaktionsmuster über die Zeit



Staatsnachfrageschock $\varepsilon_{G,t}$
Staatsnachfrage (%-Abweichung vom Steady State)
Impuls: 1% Abweichung von Ruhezustand
Annahme: $\rho_G = 0.9$
Bewegungsgleichung: $\hat{g}_t = 0.9\hat{g}_{t-1} + \varepsilon_{G,t}$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40


0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Output (%-Abweichung vom Steady State)
Ziel: Berechnung der Bewegungsgleichung, die diesen Verlauf beschreibt.

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen (b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (1)

- Das Verhalten der Modellvariablen ist nicht direkt ableitbar, da sie von ERWARTUNGEN abhängen. Die Modellvariablen lassen sich aber typischerweise darstellen als (rekursive) lineare Funktion
  - der Zustandsvariablen, die vorherbestimmt sind (in unserem Modell also k) und
  - der exogenen Schocks (in unserem Modell G und A).
- Für jede Variable x_{it} є $\{k_{t+1}, y_t, c_t, l_t, w_t, \dots\}$ in unserem Modell gilt also

$$\hat{x}_{ti} = a_{1i}\hat{k}_t + a_{2i}\hat{a}_t + a_{3i}\hat{g}_t$$

- Ansatz: ***wir nehmen an***, dass die Lösung diese Form besitzt und berechnen dann die Koeffizienten a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}.
- Dies ist die Methode der undeterminierten Koeffizienten.
- Es gibt noch viele weitere Lösungsansätze (die natürlich immer zum gleichen Ergebnis führen sollten).

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (2)

- Vereinfachung: k_t ist (in der vorangegangenen Periode) durch die Abschreibungsrate und die Investitionen vorherbestimmt. Daher reagiert z.B. k_{t+1} nicht auf unerwartete Schocks in Periode t+1. Folglich gilt: $E_t[k_{t+1}] = k_{t+1}$.
- Daher ist es manchmal sinnvoll – und für einige standardmäßige Lösungsansätze notwendig – die Variable k_{t+1} der Periode t zuzuordnen. Dies kann durch Substitution der „neuen“ Variable q_t für k_{t+1} geschehen:

$$q_t = k_{t+1}, \quad q_{t-1} = k_t \quad \text{etc.}$$

- Für jede Variable x_t є {q_t, y_t, c_t, l_t, w_t,...} in unserem Modell gilt dann eine Bewegungsgleichung der Form

$$\hat{x}_{ti} = a_{1i}\hat{q}_{t-1} + a_{2i}\hat{a}_t + a_{3i}\hat{g}_t$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (3)

Ausgangspunkt: die Modellgleichungen

Alle Parameter sind bekannt.

$$(1)\ \hat{y}_t = \alpha \hat{q}_{t-1} + (1-\alpha)\hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{l}_t$$

$$(2)\ \hat{r}_t = \hat{y}_t - \hat{q}_{t-1}$$

$$(3)\ \hat{w}_t = \hat{y}_t - \hat{l}_t$$

$$(5)\ \left(\bar{L}/(1-\bar{L})\right)\hat{l}_t = -\hat{c}_t + \hat{w}_t$$

$$(6)\ -\hat{c}_t = -E_t\left[\hat{c}_{t+1}\right] + \frac{\bar{R}}{\bar{R}+1-\delta} E_t\left[\hat{r}_{t+1}\right]$$

$$(8)\ \bar{K}\hat{q}_t = \bar{Y}\hat{y}_t - \bar{C}\hat{c}_t - \bar{G}\hat{g}_t + (1-\delta)\bar{K}\hat{q}_{t-1}$$

$$(11)\ \hat{g}_t = \rho_G \hat{g}_{t-1} + \varepsilon_{G,t}$$

$$(12)\ \hat{a}_t = \rho_A \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (4)

$$\text{(B1)}\ \hat{a}_t = \rho_A \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}$$

$$\text{(B2)}\ \hat{g}_t = \rho_G \hat{g}_{t-1} + \varepsilon_{G,t}$$

$$\text{(B3)}\ \hat{q}_t = a_{1q}\hat{q}_{t-1} + a_{2q}\hat{a}_t + a_{3q}\hat{g}_t$$

$$\text{(B4)}\ \hat{y}_t = a_{1y}\hat{q}_{t-1} + a_{2y}\hat{a}_t + a_{3y}\hat{g}_t$$

$$\text{(B5)}\ \hat{r}_t = a_{1r}\hat{q}_{t-1} + a_{2r}\hat{a}_t + a_{3r}\hat{g}_t$$

$$\text{(B6)}\ \hat{w}_t = a_{1w}\hat{q}_{t-1} + a_{2w}\hat{a}_t + a_{3w}\hat{g}_t$$

$$\text{(B7)}\ \hat{l}_t = a_{1l}\hat{q}_{t-1} + a_{2l}\hat{a}_t + a_{3l}\hat{g}_t$$

$$\text{(B8)}\ \hat{c}_t = a_{1c}\hat{q}_{t-1} + a_{2c}\hat{a}_t + a_{3c}\hat{g}_t$$

Ziel: die rekursiven Bewegungsgleichungen.

Die Parameter a_{ij} müssen aus den Parametern der Modellgleichungen abgeleitet werden.

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (5)

- Was geschieht, wenn wir die Bewegungsgleichungen (B3) – (B8) in die Modellgleichungen (1) – (8) einsetzen?
  - Wenn die Bewegungsgleichungen eine Lösung der Modellgleichungen sind, dann haben beide Gleichungssysteme den gleichen Gehalt.
  - Folglich ist das Einsetzen der Bewegungsgleichungen in die Modellgleichungen ein Einsetzen des Modells „in sich selbst".
  - Dann muss in jeder Gleichung das Ergebnis 0=0 entstehen.
- Vorgehen: Bestimme daher die Parameter der Bewegungsgleichungen so, dass nach Einsetzen der Bewegungsgleichungen in die Modellgleichungen in jeder Gleichung das Ergebnis 0=0 entsteht.

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen (b) Ansatz: Methode der undeterminierten Koeffizienten (6)

- Das RBC-Modell kann zwar „per Hand" gelöst werden (versuchen Sie es!), aber das ist sehr aufwändig.
- Glücklicherweise gibt es Lösungsalgorithmen, die das automatisch für uns machen (z.B. Dynare).
- Um die allgemeine Lösung zu verstehen, braucht man ein wenig Matrixalgebra. Um das zu vermeiden:
  - Prinzip anhand eines einfachen Beispiels verstehen.
  - Für das RBC-Modell Dynare verwenden.

Anfang
Kompaktes Beispiel

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (1)

Einfaches Modell:

(M1) $x_t = x_{t-1} - y_t + z_t$

(M2) $y_t = E_t\left[y_{t+1}\right] + \gamma x_{t-1}$

Hier hängt y_t von den uns unbekannten Erwartungen für die nächste Periode ab.

(M3) $z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid\ N(0,\sigma^2)$

Vorherbestimmte Variable: x_t

Sprungvariable: y_t

Exogener Schockprozess: $z_t \quad \Rightarrow E_t\left[z_{t+1}\right] = \rho z_t$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (2)

Ansatz:

Bewegungsgleichungen für x_t und y_t

(B1) $x_t = \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 z_t$

(B2) $y_t = \theta_3 x_{t-1} + \theta_4 z_t$

Hier hängt y_t von den uns bekannten Größen x_{t-1} und z_t ab. Eine Lösung des Modells ist möglich.
Aber vorher müssen die undeterminierten Koeffizienten θ_1 bis θ_4 bestimmt werden.

$$\Rightarrow E_t\left[y_{t+1}\right] = E_t\left[\theta_3 x_t + \theta_4 z_{t+1}\right] = \theta_3 x_t + \theta_4 E_t\left[z_{t+1}\right]$$

$$= \theta_3 x_t + \theta_4 \rho z_t$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (3)

Einsetzen der Bewegungsgleichungen (B1) und (B2) in die Modellgleichung (M1):

$$x_t = x_{t-1} - y_t + z_t$$

$$\theta_1 x_{t-1} + \theta_2 z_t = x_{t-1} - \theta_3 x_{t-1} - \theta_4 z_t + z_t$$

$$\left(\theta_1 - 1 + \theta_3\right) x_{t-1} = \left(1 - \theta_4 - \theta_2\right) z_t$$

Wenn man ein Gleichungssystem „in sich selbst“ einsetzt, müssen alle Gleichungen erfüllt sein, d.h. die linke und rechte Seite einer jeden Gleichung müssen identisch sein.
Das gilt für obige Gleichung nur, wenn links und rechts 0 steht.

$$\Rightarrow \theta_1 - 1 + \theta_3 = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \theta_4 - \theta_2 = 0$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (4)

Einsetzen der Bewegungsgleichungen (B1) und (B2) in die Modellgleichung (M2):

$$y_t = E_t\left[y_{t+1}\right] + \gamma x_{t-1}$$

$$\theta_3 x_{t-1} + \theta_4 z_t = \theta_3 x_t + \theta_4 \rho z_t + \gamma x_{t-1}$$

$$\theta_3 x_{t-1} + \theta_4 z_t = \theta_3\left(\theta_1 x_{t-1} + \theta_2 z_t\right) + \theta_4 \rho z_t + \gamma x_{t-1}$$

$$\theta_3 x_{t-1} + \theta_4 z_t = \theta_3 \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 \theta_3 z_t + \theta_4 \rho z_t + \gamma x_{t-1}$$

$$\left(\theta_3 - \theta_1 \theta_3 - \gamma\right) x_{t-1} = \left(\theta_2 \theta_3 + \rho \theta_4 - \theta_4\right) z_t$$

$$\Rightarrow \theta_3 - \theta_1 \theta_3 - \gamma = 0 \quad \text{und} \quad \theta_2 \theta_3 + \rho \theta_4 - \theta_4 = 0$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (5)

Wir haben nun 4 Gleichungen, um die undeterminierten Koeffizienten der Bewegungsgleichungen aus den Modellparametern zu bestimmen:

(a) $\theta_1 - 1 + \theta_3 = 0$

(b) $1 - \theta_4 - \theta_2 = 0$

(c) $\theta_3 - \theta_1\theta_3 - \gamma = 0$

(d) $\theta_2\theta_3 + \rho\theta_4 - \theta_4 = 0$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (6)

Einsetzen von (a) in (c) führt zu einer quadratischen Gleichung mit 2 Lösungen:

(a) $\theta_1 = 1 - \theta_3$

(c) $\theta_3 - (1 - \theta_3)\theta_3 - \gamma = \theta_3^2 - \gamma = 0 \;\Rightarrow\; \theta_3 = \sqrt{\gamma}$ oder $\theta_3 = -\sqrt{\gamma}$

Lösung 1: $\theta_3 = \sqrt{\gamma}$

$\Rightarrow$ (a) $\theta_1 = 1 - \theta_3 = 1 - \sqrt{\gamma}$

(b) $\theta_2 = 1 - \theta_4$ und (c) $\theta_3 = \sqrt{\gamma}$ in (d) einsetzen:

$\Rightarrow$ (d) $\theta_2\theta_3 + \rho\theta_4 - \theta_4 = (1 - \theta_4)\sqrt{\gamma} + \rho\theta_4 - \theta_4 = 0$

$$\Rightarrow \theta_4 = \frac{\sqrt{\gamma}}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}} \quad \text{und} \quad \theta_2 = 1 - \theta_4 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}}$$

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (7)

Lösung 1: $\theta_3 = \sqrt{\gamma}$

$\Rightarrow$ (a) $\theta_1 = 1 - \theta_3 = 1 - \sqrt{\gamma}$

(b) $\theta_2 = 1 - \theta_4$ und (c) $\theta_3 = \sqrt{\gamma}$ in (d) einsetzen:

$\Rightarrow$ (d) $\theta_2\theta_3 + \rho\theta_4 - \theta_4 = (1 - \theta_4)\sqrt{\gamma} + \rho\theta_4 - \theta_4 = 0$

$$\Rightarrow \theta_4 = \frac{\sqrt{\gamma}}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}} \quad \text{und} \quad \theta_2 = 1 - \theta_4 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\Rightarrow \text{(B1) } x_t = \boxed{\left(1 - \sqrt{\gamma}\right)} x_{t-1} + \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}} z_t$$

$$\Rightarrow \text{(B2) } y_t = \sqrt{\gamma} x_{t-1} + \frac{\sqrt{\gamma}}{1 - \rho + \sqrt{\gamma}} z_t$$

Stabile Lösung, wenn
-1<1-sqrt(γ)<1 bzw.
-2<-sqrt(γ)<0 bzw.
0<γ<4.

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (8)

Lösung 2: $\theta_3 = -\sqrt{\gamma}$

$\Rightarrow$ (a) $\theta_1 = 1 - \theta_3 = 1 + \sqrt{\gamma}$

(b) $\theta_2 = 1 - \theta_4$ und (c) $\theta_3 = -\sqrt{\gamma}$ in (d) einsetzen:

$\Rightarrow$ (d) $\theta_2\theta_3 + \rho\theta_4 - \theta_4 = -(1-\theta_4)\sqrt{\gamma} + \rho\theta_4 - \theta_4 = 0$

$$\Rightarrow \theta_4 = \frac{-\sqrt{\gamma}}{1-\rho-\sqrt{\gamma}} \quad \text{und} \quad \theta_2 = 1 - \theta_4 = \frac{1-\rho}{1-\rho-\sqrt{\gamma}}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\Rightarrow \text{(B1) } x_t = \boxed{\left(1+\sqrt{\gamma}\right)} x_{t-1} + \frac{1-\rho}{1-\rho-\sqrt{\gamma}} z_t$$

$$\Rightarrow \text{(B2) } y_t = -\sqrt{\gamma} x_{t-1} - \frac{\sqrt{\gamma}}{1-\rho-\sqrt{\gamma}} z_t$$

Stabile Lösung, wenn
-1<1+sqrt(γ)<1 bzw.
-2<sqrt(γ)<0.
Nicht möglich für reelle Zahlen!

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (9)

Kalibrierung: $\gamma = 0.36$, $\rho = 0.9$

$$\Rightarrow \text{(B1) } x_t = 0.4\,x_{t-1} + 0.1429\,z_t$$

$$\Rightarrow \text{(B2) } y_t = 0.6\,x_{t-1} + 0.8571 z_t$$

$$\text{Schockprozess: } z_t = 0.9 z_{t-1} + \varepsilon_t$$

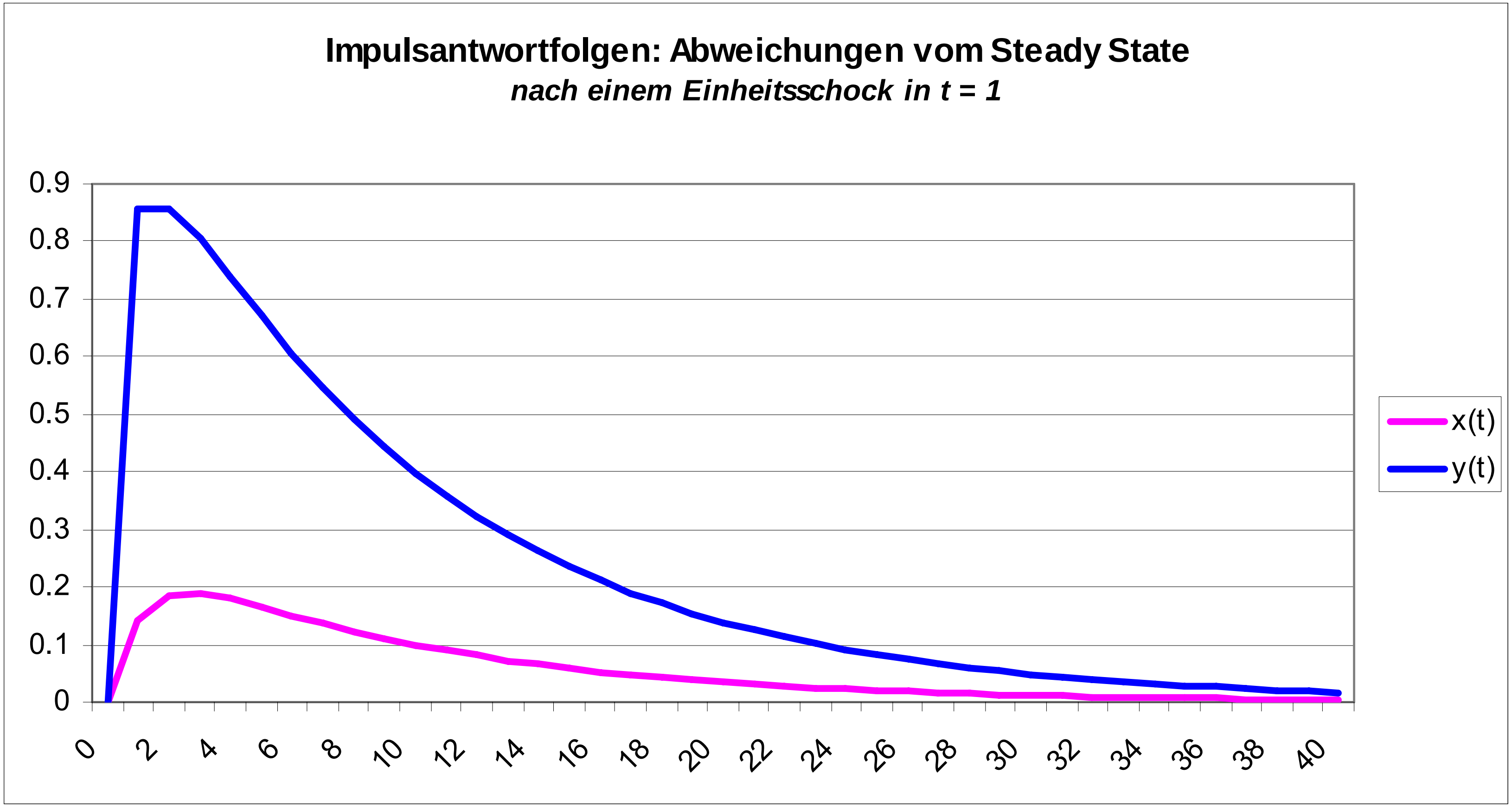
Mit Hilfe diesen Gleichungen können wir nun folgende Frage beantworten:
Angenommen, das Modell befindet sich im Gleichgewicht (x_0=0, z_0=0),
was geschieht nach einem einmaligen Einheitsschock (ε_1=1,ε_2=ε_3=...=0)?

z_1 = 1, z_2 = 0.9, z_3=0.9², ...
x_1 = 0.4*0 + 0.1429*1 = 0.1429, x_2 = 0.4*0.1429 + 0.1429*0.9 = 0.1875, ...
y_1 = 0.6*0 + 0.8571*1 = 0.8571, y_2 = 0.6*0.1429 + 0.8571*0.9 = 0.8571, ...

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (10)

Periode	epsilon(t)	z(t)	x(t)	y(t)
0			0	0
1	1	1.0000	0.1429	0.8571
2	0	0.9000	0.1857	0.8571
3	0	0.8100	0.1900	0.8057
4	0	0.7290	0.1801	0.7389
5	0	0.6561	0.1658	0.6705
6	0	0.5905	0.1507	0.6056
7	0	0.5314	0.1362	0.5459
8	0	0.4783	0.1228	0.4917
9	0	0.4305	0.1106	0.4427
10	0	0.3874	0.0996	0.3984
11	0	0.3487	0.0896	0.3586
12	0	0.3138	0.0807	0.3228
13	0	0.2824	0.0726	0.2905
14	0	0.2542	0.0654	0.2614
15	0	0.2288	0.0588	0.2353
16	0	0.2059	0.0529	0.2118
17	0	0.1853	0.0476	0.1906
18	0	0.1668	0.0429	0.1715
19	0	0.1501	0.0386	0.1544
20	0	0.1351	0.0347	0.1389
21	0	0.1216	0.0313	0.1251

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Methode der undeterminierten Koeffizienten (11)

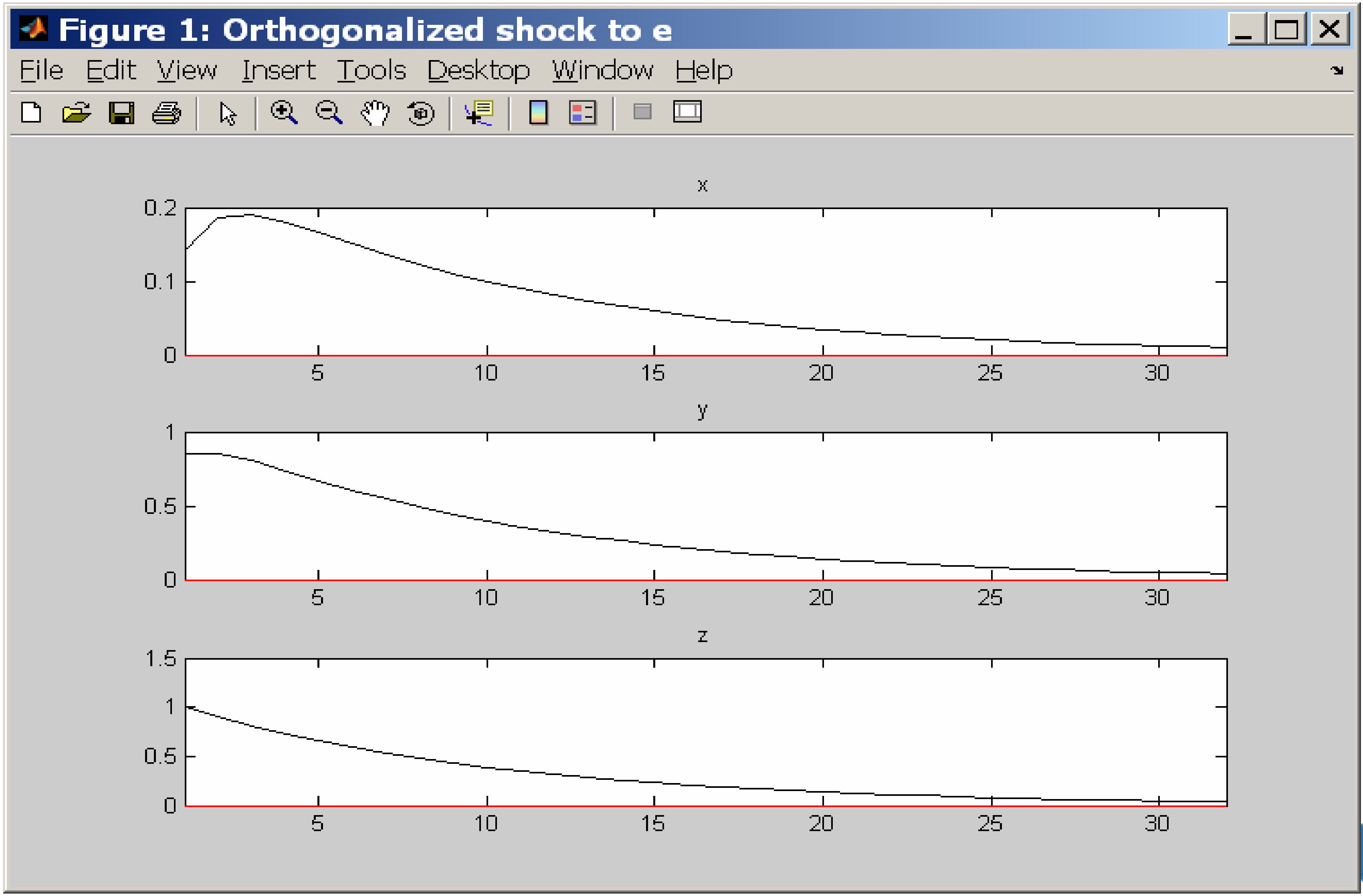


4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Lösung mit Dynare (1)

```
//Einfaches Beispiel
var x y z;
varexo e;

parameters gamma rho;
gamma = 0.36;
rho = 0.9;

model(linear);
x = x(-1) - y + z;
y = y(+1) + gamma*x(-1);
z = rho*z(-1) + e;
end;

shocks;
var e=1;
end;

stoch_simul(irf=21);
```

1. Definiere endogene Variablen und exogene Variablen (Schocks)
2. Definiere die Modellparameter
3. Schreibe das Modell auf
4. Gib die Varianz der Schocks an
5. Simuliere das Modell

4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
(c) Beispiel: Lösung mit Dynare (2)



Ende
Kompaktes Beispiel