2. Reale Konjunkturtheorie

Prof. Dr. Kai Carstensen
LMU und Ifo Institut

Ansatz

- Konjunkturzyklen als Ergebnis preisgeräumter, *gleichgewichtiger* Märkte (Walras-Ökonomie)
- Erweiterung des Ramsey-Wachstumsmodells um
  - Arbeitsangebot
  - stochastische Schocks (Technologie, Staatsnachfrage)
  - Marktteilnehmer reagieren auf Schocks → Fluktuationen um dem balancierten Wachstumspfad
- Nur reale Größen → reale Konjunkturtheorie (Real Business Cycle, RBC)
- Keine Rigiditäten (Preis- und Lohnsetzung) oder Abweichungen vom Modell der vollkommenen Märkte (vollkommene Konkurrenz, keine Kreditrestriktionen) → nominale Schocks (Geld, Preise etc) haben keine Wirkung
- Implikation:
  - in der Rezession schränken die Haushalte ihr Arbeitsangebot ein
  - Arbeitslosigkeit ist eine freiwillige (optimale) Reaktion auf exogene Schocks
- Basismodell für neukeynesianischen Ansatz, der Rigiditäten berücksichtigt

Struktur des Modells (1)

- Märkte sind im Zustand vollkommener Konkurrenz.
- Löhne und Preise sind vollkommen flexibel.
- Es gibt keine Rigiditäten oder Anpassungsverzögerungen.
- Daher sind die Märkte immer preisgeräumt.
- Exogene, *stochastische* Schocks bringen das System immer wieder aus dem Ruhezustand.
- Daher spielen Erwartungen eine wichtige Rolle.
- Haushalte und Firmen reagieren in nutzen- bzw. gewinnmaximierender Weise auf die Schocks
- Keine Wachstumsprozesse (dauerhafter TF, Bevölkerungswachstum), da Konjunkturmodell: stationäre Ökonomie. Wir interessieren uns nur für die Fluktuationen.

Struktur des Modells (2)

- Firmen
  - sind klein und daher Preisnehmer
  - Cobb-Douglas-Produktionstechnologie mit Arbeit, Kapital und exogenem, stochastischem technischen Fortschritt, der die Arbeitsproduktivität erhöht
  - Vollkommene Konkurrenz auf Faktor- und Gütermärkten
  - Entlohnung mit Grenzprodukt
  - Preis = Grenzkosten
  - Gewinne = 0
  - hier: eine repräsentative Firma

Struktur des Modells (3)

- Haushalte
  - lieben Konsum und Freizeit
  - beziehen Einkommen aus Arbeit und Kapitalvermögen
  - glätten ihren Nutzen über die Zeit, indem sie
    - sparen und in Kapital investieren
    - ihr Arbeitsangebot variieren
  - treffen heute Entscheidungen unter Unsicherheit, die morgen Auswirkungen haben (*stochastische* Schocks!)
  - bilden daher (rationale) Erwartungen
  - sind klein und daher Preisnehmer
  - hier: ein repräsentativer Haushalt

Struktur des Modells (4)

- der Staat
  - konsumiert einen Teil der Produktion
  - spielt ansonsten keine Rolle
- die Geldpolitik
  - ist irrelevant und daher nicht modelliert

Das Modell

Staat (1)

- erhebt Pauschalsteuer T von den Haushalten
- fragt einen Teil G der Produktion nach
- In jedem Zeitpunkt finanzieren die Steuern genau die Ausgaben:

$$T_t = G_t$$

- Staatsausgaben haben einen systematischen, zeitkonstanten Teil $\bar{g}$ und einen stochastischen, zeitvariierenden Teil $\hat{g}_t$

$$\ln G_t = g_t = \bar{g} + \hat{g}_t \quad \text{mit} \quad \hat{g}_t = \rho_G \hat{g}_{t-1} + \varepsilon_{G,t}, \quad -1 < \rho_G < 1$$

Zufallsvariable mit Mittelwert von Null

$$\Rightarrow g_t - \bar{g} = \rho_G \left(g_{t-1} - \bar{g} \right) + \varepsilon_{G,t}$$

$$\text{bzw.} \quad g_t = \left(1 - \rho_G\right) \bar{g} + \rho_G g_{t-1} + \varepsilon_{G,t}$$

Staat (2)

Treten für lange Zeit keine Staatsausgabenschocks auf, dann nähern sich die Staatsausgaben ihrem Erwartungswert = Mittelwert an. Langfristig sind die Staatsausgaben dann konstant, d.h. $E[g_{t-1}] = E[g_t]$. Dann gilt:

$$E[g_t] = (1-\rho_G)\bar{g} + \rho_G \underbrace{E[g_{t-1}]}_{=E[g_t]} + \underbrace{E[\varepsilon_{G,t}]}_{=0}$$

$$(1-\rho_G)E[g_t] = (1-\rho_G)\bar{g}$$

$$E[g_t] = \bar{g}$$

Die systematische, zeitkonstante Komponente der Staatsausgaben ist also der Erwartungswert der Staatsausgaben, der bei Ausbleiben von Schocks langfristig erreicht wird.

Haushalte (1) – Budgetbeschränkung

- bauen Kapital auf, indem sie sparen=investieren
- vermieten ihren Kapitalstock an die Unternehmen
- verwenden ihr Arbeits- und Kapitaleinkommen für Konsum, Steuern und Sparen/Investitionen

Kapitalfortschreibung: $K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$

Budgetbeschränkung: $W_t L_t + R_t K_t = C_t + T_t + I_t$

mit $K_t =$ Kapital, $I_t =$ Investition, $\delta =$ Abschreibungsrate,

$W_t =$ Reallohn, $L_t =$ Arbeit, $R_t =$ Bruttorealzins

Eliminieren von I_t:

$$\boxed{W_t L_t + \left(R_t - \delta + 1\right) K_t = C_t + T_t + K_{t+1}}$$

konsolidierte Budgetbeschränkung

Haushalte (2) – Nutzenfunktion

- maximieren ihren Nutzen bei gegebener Budgetbeschränkung
- Nutzen hängt ab von Konsum und Freizeit
- Nutzen zukünftiger Perioden wird mit Diskontrate ρ „abgezinst“
- gesamte Periodenzeit auf 1 normiert: Freizeit ist $1 - L_t$

$$E_t\left[U_t\right] = E_t\left[\sum_{\tau=t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} u\left(C_\tau, 1-L_\tau\right)\right] = u\left(C_t, 1-L_t\right)$$

$$+e^{-\rho} E_t\left[u\left(C_{t+1}, 1-L_{t+1}\right)\right] + e^{-2\rho} E_t\left[u\left(C_{t+2}, 1-L_{t+2}\right)\right] + \ldots$$

hier: einfache Nutzenfunktion

$$u\left(C_t, 1-L_t\right) = \ln C_t + b \ln\left(1-L_t\right), \; b > 0$$

Firmen

- maximieren ihren Gewinn bei gegebener Produktionstechnologie
- Cobb-Douglas-Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen
- Arbeitssparender technischer Fortschritt

Produktionsfunktion:

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1$$

mit Y_t = Output, A_t = arbeitssparender TF

Gewinnfunktion:

$$\Gamma_t = Y_t - W_t L_t - R_t K_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} - W_t L_t - R_t K_t$$

Technischer Fortschritt (1)

- TF ist exogen
- Arbeitsproduktivitätsparameter variiert stochastisch
- Produktivitätsschocks erhöhen temporär die Arbeitsproduktivität
- dauerhaft wirkende Produktivitätsschocks ändern den Wachstumspfad des Modells, nicht aber die konjunkturellen Schwankungen um diesen Pfad – sie werden daher vernachlässigt

$$\ln A_t = a_t = \bar{a} + \tilde{a}_t \quad \text{mit} \quad \tilde{a}_t = \rho_A \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}, \quad -1 < \rho_A < 1$$

Zufallsvariable mit Mittelwert von Null

$$\Rightarrow a_t - \bar{a} = \rho_A \left(a_{t-1} - \bar{a} \right) + \varepsilon_{A,t}$$

$$\text{bzw.} \quad a_t = \left(1 - \rho_A\right)\bar{a} + \rho_A a_{t-1} + \varepsilon_{A,t}$$

Technischer Fortschritt (2)

Treten für lange Zeit keine Technologieschocks auf, dann nähert sich der technische Fortschritt seinem Erwartungswert an (analog zu Staatsausgaben). Langfristig ist der TF dann konstant, d.h. $E[a_{t-1}] = E[a_t]$. Dies ist eine Folge der Vernachlässigung trendmäßigen Fortschritts, aber für die Konjunkturanalyse ohne Konsequenz. Es gilt:

$$E\left[a_t\right] = \overline{a}$$

Markträumung

- Produktionsmenge wird vollständig nachgefragt durch Investitionen, privaten Konsum und Staatskonsum

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Lösungsansatz

Lösung von dynamischen stochastischen Gleichungssystemen mit rationalen Erwartungen

1. Bestimme die Bedingungen 1. Ordnung (FOCs)
2. Berechne das nichtstochastische Steady State
3. Loglinearisiere
4. Berechne die rekursiven Bewegungsgleichungen
5. Berechne die Impulsantwortfolgen

1. **Bestimme die Bedingungen 1. Ordnung (FOCs)**

Firmen (1)

Gewinnfunktion:

$$\Gamma_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha} - W_t L_t - R_t K_t$$

Gewinnmaximierung:

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial K_t} = \alpha \left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - R_t = 0 \quad \Rightarrow \quad R_t = \alpha \left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}$$

$$\frac{\partial \Gamma_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t - W_t = 0 \quad \Rightarrow \quad W_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}$$

Optimalitätsbedingungen (FOCs)
der repräsentativen Firma

Firmen (2)

Das Verhalten der Firmen wird vollständig beschrieben durch:

Produktionsfunktion: $Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}$

Kapitalnachfrage: $R_t = \alpha \frac{Y_t}{K_t}$

Arbeitsnachfrage: $W_t = (1-\alpha)\frac{Y_t}{L_t}$

Haushalte (1)

Nutzenfunktion:

$$E_t\left[U_t\right] = E_t\left[\sum_{\tau=t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} u\left(C_\tau, 1-L_\tau\right)\right]$$

Budgetbeschränkung:

$$W_t L_t + \left(R_t - \delta + 1\right) K_t = C_t + T_t + K_{t+1}$$

Haushalte (2) – Lagrange-Funktion aufstellen

$$\mathcal{L} = E_t \left\{ \sum_{\tau=t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \left[\underbrace{\ln C_\tau + b\ln(1-L_\tau)}_{\text{Periodennutzen } u} + \lambda_\tau \underbrace{\left(W_\tau L_\tau + (R_\tau + 1 - \delta) K_\tau - C_\tau - T_\tau - K_{\tau+1} \right)}_{\text{Budgetbeschränkung}} \right] \right\}$$

Abdiskontierung

Lagrange-Multiplikator

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & \ln C_t + b\ln(1-L_t) + \lambda_t \left(W_t L_t + (R_t + 1 - \delta) K_t - C_t - T_t - K_{t+1} \right) \\
& + e^{-\rho} E_t \left[\ln C_{t+1} + b\ln(1-L_{t+1}) + \lambda_{t+1} \left(W_{t+1} L_{t+1} + (R_{t+1} + 1 - \delta) K_{t+1} - C_{t+1} - T_{t+1} - K_{t+2} \right) \right] \\
& + e^{-2\rho} E_t \left[\ln C_{t+2} + b\ln(1-L_{t+2}) + \lambda_{t+2} \ldots \right] \\
& + e^{-3\rho} E_t \left[\ln C_{t+3} + b\ln(1-L_{t+3}) + \lambda_{t+3} \ldots \right] \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

K_{t+1} erscheint in den Budget-beschränkungen von zwei Perioden!!!

Haushalte (3) – Lagrange-Funktion ableiten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{\partial u}{\partial C_t} - \lambda_t = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = \frac{\partial u}{\partial L_t} + \lambda_t W_t = \frac{-b}{1-L_t} + \lambda_t W_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + e^{-\rho} E_t\left[\lambda_{t+1}\left(R_{t+1} + 1 - \delta\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = W_t L_t + \left(R_t + 1 - \delta\right) K_t - C_t - T_t - K_{t+1} = 0$$

Haushalte (4) – alle Bestimmungsgleichungen

Konsumnachfrage: $C_t^{-1} = \lambda_t$

Arbeitsangebot: $b\left(1-L_t\right)^{-1} = \lambda_t W_t$

Eulergleichung: $\lambda_t = e^{-\rho} E_t\left[\lambda_{t+1}\left(R_{t+1}+1-\delta\right)\right]$

Budgetrestriktion: $W_t L_t + \left(R_t + 1 - \delta\right) K_t = C_t + T_t + K_{t+1}$

Eulergleichung:
Gleichung, die das intertemporale Entscheidungskalkül (hier: des Haushalts) reflektiert.

Haushalte (5) – Lagrange-Multiplikator

Interpretation des Langrange-Multiplikators:

$$\lambda_t = \frac{\partial u}{\partial C_t} = \text{ Grenznutzen des Konsums}$$

alternativ

$$-\frac{\partial u / \partial L_t}{W_t} = \frac{\partial u}{\partial Freizeit_t} \frac{P_t}{W_t^{nom}} = \lambda_t$$

$=$ Grenznutzen der Freizeit, ausgedrückt in Güterpreisen

Haushalte (6) – Substitution zwischen Freizeit und Konsum

Konsumnachfrage: $\frac{\partial u}{\partial C_t} = C_t^{-1} = \lambda_t$

Arbeitsangebot: $-\frac{\partial u}{\partial L_t} = b\left(1 - L_t\right)^{-1} = \lambda_t W_t$

$$\Rightarrow -\frac{\partial u / \partial L_t}{\partial u / \partial C_t} = \frac{\partial u / \partial Freizeit_t}{\partial u / \partial C_t} = W_t = \frac{W_t^{nom}}{P_t}$$

Haushalte (7) – Eulergleichung

$$\lambda_t = e^{-\rho} E_t \left[\lambda_{t+1} \left(R_{t+1} + 1 - \delta \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = e^{-\rho} E_t \left[\frac{\partial u}{\partial C_{t+1}} \left(R_{t+1} + 1 - \delta \right) \right]$$

Der Grenznutzen des heutigen Konsums entspricht im Nutzenoptimum dem mit der individuellen Zeitpräferenzrate auf heute abgezinsten, erwarteten Grenznutzen des morgigen Konsums. Dabei muss noch berücksichtigt werden, dass heutiger Konsumverzicht=Sparen=Investieren in der Folgeperiode zu einem um die Rate R_{t+1}-δ (=Nettorendite nach Abschreibung) höheren Einkommen führt.

Intertemporale Substitution der Konsumnachfrage

Haushalte (8) – Eulergleichung

$$\lambda_t = e^{-\rho} E_t \left[\lambda_{t+1} \left(R_{t+1} + 1 - \delta \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial Freizeit_t} W_t^{-1} = e^{-\rho} E_t \left[\frac{\partial u}{\partial Freizeit_{t+1}} W_{t+1}^{-1} \left(R_{t+1} + 1 - \delta \right) \right]$$

Der in Güterpreisen ausgedrückte Grenznutzen der heutigen Freizeit entspricht im Nutzenoptimum dem mit der individuellen Zeitpräferenzrate auf heute abgezinsten, erwarteten Grenznutzen der morgigen Freizeit, wiederum ausgedrückt in (morgigen) Güterpreisen. Dabei muss noch berücksichtigt werden, dass heutiger Freizeitverzicht=Mehrarbeit=Mehreinkommen= Sparen =Investieren in der Folgeperiode zu einem um die Rate $R_{t+1}-\delta$ (=Nettorendite nach Abschreibung) höheren Einkommen=weniger Arbeit=mehr Freizeit führt.

Intertemporale Substitution des Arbeitsangebots

2. Berechne das nichtstochastische Steady State

Modellgleichungen

(1) Produktionsfunktion: $Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t\right)^{1-\alpha}$

(2) Kapitalnachfrage: $R_t = \alpha Y_t / K_t$

(3) Arbeitsnachfrage: $W_t = (1-\alpha) Y_t / L_t$

(4) Konsumnachfrage: $C_t^{-1} = \lambda_t$

(5) Arbeitsangebot: $b\left(1-L_t\right)^{-1} = \lambda_t W_t$

(6) Eulergleichung: $\lambda_t = e^{-\rho} E_t\left[\lambda_{t+1}\left(R_{t+1}+1-\delta\right)\right]$

(7) Budgetrestriktion: $W_t L_t + \left(R_t + 1 - \delta\right) K_t = C_t + T_t + K_{t+1}$

(8) Kapitalfortschreibung: $K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$

(9) Staat: $T_t = G_t$

(10) Markträumung: $Y_t = C_t + I_t + G_t$

(11) Staatsnachfrageschock: $G_t = e^{g_t}, \quad g_t = \left(1-\rho_G\right)\bar{g} + \rho_G g_{t-1} + \varepsilon_{G,t}$

(12) Technologieschock: $A_t = e^{a_t}, \quad a_t = \left(1-\rho_A\right)\bar{a} + \rho_A a_{t-1} + \varepsilon_{A,t}$

Nichtstochastisches Steady State (1)

- langfristiger Gleichgewichtspfad, den das Modell erreicht, wenn keine stochastischen Störungen (=Schocks) das Modell treffen
- technisch:
  - Setze alle Zufallsvariablen auf ihren Erwartungswert.
  - In unserer stationären Ökonomie, in der es kein langfristiges Wachstum gibt, sind alle Größen langfristig konstant. Dies impliziert für alle Variablen x des Modells:

$$x_{t-1} = x_t = x_{t+1} = \ldots = x_{t+n} =: \bar{x}$$

Nichtstochastisches Steady State (2)

nichtstochastisch: $\varepsilon_{G,t} = E\left[\varepsilon_{G,t}\right] = 0, \quad \varepsilon_{A,t} = E\left[\varepsilon_{A,t}\right] = 0$

Steady State: $g_t = g_{t-1} = \ldots, \quad a_t = a_{t-1} = \ldots$

$$\Rightarrow g_t = (1-\rho_G)\bar{g} + \rho_G \underbrace{g_{t-1}}_{=g_t} + \underbrace{\varepsilon_{G,t}}_{=0} \quad \Rightarrow \quad g_t = \bar{g}$$

$$\Rightarrow a_t = (1-\rho_A)\bar{a} + \rho_A \underbrace{a_{t-1}}_{=a_t} + \underbrace{\varepsilon_{A,t}}_{=0} \quad \Rightarrow \quad a_t = \bar{a}$$

$$\Rightarrow G_t = e^{\bar{g}} =: \bar{G}$$

$$\Rightarrow A_t = e^{\bar{a}} =: \bar{A}$$

Zustand im nichtstochastischen Steady State

Nichtstochastisches Steady State (3)

- Für alle weiteren Variablen werden die Steady-State-Werte ins Gleichungssystem eingesetzt
- Es gilt also z.B.

$$G_t = \bar{G}, \quad A_t = \bar{A}$$

$$Y_t = \bar{Y}, \quad C_t = \bar{C}, \quad \text{etc.}$$

$$K_t = K_{t+1} = \bar{K}$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} = \bar{\lambda}$$

Modellgleichungen im Steady State

(1) Produktionsfunktion: $\bar{Y} = \bar{K}^{\alpha} \bar{A}^{1-\alpha} \bar{L}^{1-\alpha}$

(2) Kapitalnachfrage: $\bar{R} = \alpha \bar{Y} / \bar{K}$

(3) Arbeitsnachfrage: $\bar{W} = (1-\alpha)\bar{Y} / \bar{L}$

(4) Konsumnachfrage: $\bar{C}^{-1} = \bar{\lambda}$

(5) Arbeitsangebot: $b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \bar{\lambda}\bar{W}$

(6) Eulergleichung: $\bar{\lambda} = \boxed{e^{-\rho}\bar{\lambda}\left(\bar{R}+1-\delta\right)}$

Erwartungswert fällt weg, da alles zeitkonstant ist.

(7) Budgetrestriktion: $\bar{W}\bar{L} + \left(\bar{R}+1-\delta\right)\bar{K} = \bar{C} + \bar{T} + \bar{K}$

(8) Kapitalfortschreibung: $\bar{K} = \bar{K} + \bar{I} - \delta\bar{K}$

(9) Staat: $\bar{T} = \bar{G}$

(10) Markträumung: $\bar{Y} = \bar{C} + \bar{I} + \bar{G}$

(11) Staatsnachfrageschock: $\bar{G} = e^{\bar{g}}$

(12) Technologieschock: $\bar{A} = e^{\bar{a}}$

Lösung des Steady States

- nichtlineares Gleichungssystem
- schrittweises Einsetzen für analytische Lösung
- oder:
- Vorgabe numerischer Parameterwerte und numerische Lösung (Software)

Analytische Lösung (1)

Substituiere die folgende Variablen:

$$(2)\quad \bar{R} = \alpha \bar{Y} / \bar{K}$$

$$(3)\quad \bar{W} = \left(1-\alpha\right) \bar{Y} / \bar{L}$$

$$(4)\quad \bar{C}^{-1} = \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \bar{C}^{-1}$$

$$(8)\quad \bar{K} = \bar{K} + \bar{I} - \delta \bar{K} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = \delta \bar{K}$$

$$(9)\quad \bar{T} = \bar{G}$$

Analytische Lösung (2)

(1) Produktionsfunktion: $\bar{Y} = \bar{K}^{\alpha} \bar{A}^{1-\alpha} \bar{L}^{1-\alpha}$

(5) Arbeitsangebot: $b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \bar{\lambda}\bar{W}$

Substitution: $b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \bar{C}^{-1}\left(1-\alpha\right)\bar{Y} / \bar{L}$

(6) Eulergleichung: $\bar{\lambda} = e^{-\rho}\bar{\lambda}\left(\bar{R}+1-\delta\right)$

Substitution: $1 = e^{-\rho}\left(\alpha\bar{Y} / \bar{K}+1-\delta\right)$

$$e^{\rho} = \alpha\bar{Y} / \bar{K}+1-\delta$$

$$\bar{Y} / \bar{K} = \frac{e^{\rho}-1+\delta}{\alpha}$$

(10) Markträumung: $\bar{Y} = \bar{C}+\delta\bar{K}+\bar{G}$

$$\bar{C} = \bar{Y}-\delta\bar{K}-\bar{G}$$

Analytische Lösung (3)

(7) Budgetrestriktion:

$$\bar{L}\left(1-\alpha\right)\bar{Y}/\bar{L}+\left(\alpha\bar{Y}/\bar{K}+1-\delta\right)\bar{K}=\bar{C}+\bar{G}+\bar{K}$$

$$\left(1-\alpha\right)\bar{Y}+\alpha\bar{Y}+\left(1-\delta\right)\bar{K}=\bar{C}+\bar{G}+\bar{K}$$

$$\boxed{\bar{Y}=\bar{C}+\delta\bar{K}+\bar{G}}$$

Dies entspricht der Markträumungsbedingung. Im vorliegenden Modell ist die Budgetrestriktion eine „überflüssige“ Bestimmungsgleichung für das Steady State, d.h. sie liefert keine zusätzliche Information. Folglich kann sie im weiteren vernachlässigt werden.

Analytische Lösung (4)

(1) Produktionsfunktion: $\bar{Y} = \bar{K}^{\alpha} \bar{A}^{1-\alpha} \bar{L}^{1-\alpha}$

(5) Arbeitsangebot: $b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \bar{C}^{-1}(1-\alpha)\bar{Y}/\bar{L}$

(6) Eulergleichung: $\bar{Y}/\bar{K} = \dfrac{e^{\rho}-1+\delta}{\alpha}$

(10) Markträumung: $\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K} - \bar{G}$

Nächster Schritt: substituiere den Konsum.

Analytische Lösung (5)

$$(1)\quad \bar{Y} = \bar{K}^{\alpha} \bar{A}^{1-\alpha} \bar{L}^{1-\alpha}$$

$$(5)\quad b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \left(\bar{Y} - \delta\bar{K} - \bar{G}\right)^{-1} \left(1-\alpha\right)\bar{Y} / \bar{L}$$

$$(6)\quad \bar{Y} / \bar{K} = \frac{e^{\rho} - 1 + \delta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = \bar{K} \underbrace{\frac{e^{\rho} - 1 + \delta}{\alpha}}_{=:\,\gamma} = \gamma\bar{K}$$

Nächster Schritt: substituiere den Output.

Analytische Lösung (6)

$$(1)\quad \gamma\bar{K} = \bar{K}^{\alpha}\bar{A}^{1-\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$$

$$\bar{K}^{1-\alpha} = \gamma^{-1}\bar{A}^{1-\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$$

$$\bar{K} = \gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}$$

$$(5)\quad b\left(1-\bar{L}\right)^{-1} = \left(\gamma\bar{K}-\delta\bar{K}-\bar{G}\right)^{-1}(1-\alpha)\gamma\bar{K}/\bar{L}$$

Nächster Schritt: substituiere das Kapital.

Analytische Lösung (7)

$$b\left(1-\bar{L}\right)^{-1}=\left(\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}-\bar{G}\right)^{-1}\left(1-\alpha\right)\gamma\,\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}\,/\,\bar{L}$$

$$b\left(1-\bar{L}\right)^{-1}=\left(\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}-\bar{G}\right)^{-1}\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\bar{A}$$

$$b\left(\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}-\bar{G}\right)=\left(1-\bar{L}\right)\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\bar{A}$$

$$b\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}-b\bar{G}=\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\bar{A}-\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\bar{A}\bar{L}$$

$$\left[b\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}+\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\right]\bar{A}\bar{L}=b\bar{G}+\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}\bar{A}$$

$$\bar{L}=\frac{b\frac{\bar{G}}{\bar{A}}+\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}{b\left(\gamma-\delta\right)\gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}}+\left(1-\alpha\right)\gamma^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}$$

Analytische Lösung (8)

Berechnung der anderen Steady-State-Werte aus L:

$$\bar{K} = \gamma^{\frac{-1}{1-\alpha}} \bar{A}\bar{L}$$

$$\bar{Y} = \gamma \bar{K}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta \bar{K} - \bar{G}$$

etc.

Numerische Lösung (1)

1. Schritt: Kalibriere das Modell, d.h. unterstelle plausible, i.d.R. in anderen Studien belegte Parameterwerte

$\alpha = 1/3$ Anteil der Kapitaleinkommen

$\rho = 1\%$ Individueller "Zins"

$\delta = 2.5\%$ Abschreibungsrate

$b = 2.3$ Gewicht der Freizeit

$\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{A} = e^{\bar{a}} = 1$ Produktivitätsparameter

$\bar{g} = -1.7 \Rightarrow \bar{G} = e^{\bar{g}} = 0.183$ Beeiflusst den Staatsanteil

Numerische Lösung (2)

2. Schritt: Löse das Modell mit Hilfe eines numerischen Algorithmus (Suchverfahren) Achte dabei darauf, dass die Ergebnisse „plausibel“ sind.

$\bar{L} = 0.33$	1/3 des Tages für Arbeit = 8 Stunden
$\bar{C}/\bar{Y} = 0.58$	Konsumanteil am Verbrauch
$\bar{I}/\bar{Y} = 0.24$	Investitionsanteil am Verbrauch
$\bar{G}/\bar{Y} = 0.18$	Staatsanteil am Verbrauch

Zum Vergleich Deutschland 2007:
C/Y = 56.7%,
I/Y = 18.3%,
G/Y = 18.0%,
(Ex-Im)/Y = 7.0%

Numerische Lösung (3)

2. Schritt: Löse das Modell mit Hilfe eines numerischen Algorithmus (Suchverfahren) Achte dabei darauf, dass die Ergebnisse „plausibel“ sind.

Anteile am Bruttoeinkommen (incl. Abschreibungen):

$\overline{W}\overline{L}/\overline{Y} = 0.67$ Lohnanteil

$\overline{R}\overline{K}/\overline{Y} = 0.33$ Zinsanteil

Anteile am Nettoeinkommen (ohne Abschreibungen):

$\overline{W}\overline{L}/(\overline{Y} - \delta\overline{K}) = 0.88$ Lohnanteil

$(\overline{R}-\delta)\overline{K}/(\overline{Y} - \delta\overline{K}) = 0.12$ Zinsanteil

Zum Vergleich Deutschland 2007:
Arbeitnehmerentgelte/Volkseinkommen = 64.7%
Unternehmens- und Vermögenseinkommen/VE = 35.3%
nb: in der geschlossenen Volkswirtschaft gilt
VE = BIP-Abschreibungen-Indirekte Steuern+Subventionen