

Das Neukeynesianische Makromodell: Details

Einige detaillierte Ableitungen von Ergebnissen des Neukeynesianischen Makromodells.

1. Berechnung des gewinnmaximierenden Güterpreises eines repräsentativen Unternehmens bei flexibler Preisanpassung
2. Berechnung des gewinnmaximierenden Güterpreis eines repräsentativen Unternehmens bei stotternder Preisanpassung
3. Log-lineare Taylorapproximation für den gewinnmaximierenden Güterpreis an der Stelle des natürlichen Gleichgewichts
4. Ableitung der Inflationsgleichung $\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda \widehat{mc}_t^r$ aus der log-linearen Preissetzungsregel und der Differenzgleichung $p_t = \theta p_{t-1} + (1 - \theta)p_t^*$. (Hinweis: Dazu wird die Schreibweise $\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} mc_s = (1 - \beta\theta L^{-1})^{-1} mc_t$ verwendet, wobei L der Lagoperator mit $L^i x_t = x_{t-i}$ und folglich $L^{-1} x_t = x_{t+1}$ ist.)

Lösung zu 1:

Bei flexiblen Preisen setzt jedes Unternehmen den Preis für die aktuelle Periode, um den Gewinn

$$G_t^f(i) = P_t(i)Y_t(i) - W_tN_t(i) \quad (1)$$

zu maximieren. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Arbeitseinsatz keine freie Entscheidungsvariable des Unternehmens ist, wenn es den Preis einmal festgelegt hat. Vielmehr determiniert der Preis die zur Deckung der Nachfrage erforderliche Produktionsmenge, wofür wiederum ein bestimmter Arbeitseinsatz benötigt wird. Daher wird $N_t(i)$ mit Hilfe der Produktionsfunktion aus (5) heraussubstituiert:

$$G_t^f(i) = P_t(i)Y_t(i) - W_tA_t^{-1}Y_t(i). \quad (2)$$

Da das Unternehmen als Monopolist die Preisabsatzfunktion der Konsumenten kennt, wird die Preisabsatzfunktion für $Y_t(i)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} G_t^f(i) &= P_t(i)Y_t(P_t/P_t(i))^\epsilon - W_tA_t^{-1}Y_t(P_t/P_t(i))^\epsilon \\ &= P_t(i)^{1-\epsilon}Y_tP_t^\epsilon - P_t(i)^{-\epsilon}W_tA_t^{-1}Y_tP_t^\epsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum lautet

$$\frac{\partial G_t^f(i)}{\partial P_t(i)} = (1 - \epsilon)P_t(i)^{-\epsilon}Y_tP_t^\epsilon + \epsilon P_t(i)^{-1-\epsilon}W_tA_t^{-1}Y_tP_t^\epsilon \stackrel{!}{=} 0.$$

Auflösen nach $P_t(i)$ ergibt

$$P_t(i) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}W_tA_t^{-1} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1}MC_t. \quad (4)$$

Zudem lässt sich zeigen, dass die zweite Ableitung der Gewinnfunktion an der Stelle $P_t(i) = \frac{\epsilon}{\epsilon-1}MC_t$ negativ ist, falls $\epsilon > 1$. Es handelt sich dann also tatsächlich um ein Maximum.

Lösung zu 2:

Für die Ableitung des gewinnmaximierenden Güterpreises wird die Unsicherheit zukünftiger Variablen ausgeblendet, so dass die Gewinnfunktion

$$G_t^s(i) = \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [P_t^*(i)Y_s(i) - W_s N_s(i)] \quad (5)$$

bezüglich $P_t^*(i)$ zu maximieren ist, da das Unternehmen als Monopolist die Preisabsatzfunktion der Konsumenten kennt. Dabei ist zu beachten, dass der einmal gewählte Preis $P_t^*(i)$ für den gesamten Optimierungszeitraum konstant bleibt, also nicht vom Index s abhängt. Zudem ist zu berücksichtigen, dass der Arbeitseinsatz keine freie Entscheidungsvariable des Unternehmens ist, wenn es den Preis einmal festgelegt hat. Vielmehr determiniert der Preis die zur Deckung der Nachfrage erforderliche Produktionsmenge, wofür wiederum ein bestimmter Arbeitseinsatz benötigt wird. Daher wird $N_s(i)$ mit Hilfe der Produktionsfunktion aus (5) heraussubstituiert:

$$G_t^s(i) = \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [P_t^*(i)Y_s(i) - W_s A_s^{-1} Y_s(i)]. \quad (6)$$

Nun wird die Preisabsatzfunktion für $Y_s(i)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} G_t^s(i) &= \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [P_t^*(i) - MC_s] C_s P_s^\epsilon P_t^*(i)^{-\epsilon} (1 - \tau)^{-1} \\ &= \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [P_t^*(i)^{1-\epsilon} - P_t^*(i)^{-\epsilon} MC_s] C_s P_s^\epsilon (1 - \tau)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Zur Vereinfachung gehen wir davon aus, dass der Staatsanteil in diesem Zeitraum unverändert bleibt ($\tau_s = \tau$). Außerdem ersetzen wir $W_s A_s^{-1}$ durch MC_s , um deutlich zu machen, dass es sich hierbei um die nominalen Grenzkosten handelt.

Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_t}{\partial P_t^*(i)} &= \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [(1 - \epsilon)P_t^*(i)^{-\epsilon} + \epsilon P_t^*(i)^{-\epsilon-1} MC_s] C_s P_s^\epsilon (1 - \tau)^{-1} \\ &= \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} [(1 - \epsilon) + \epsilon P_t^*(i)^{-1} MC_s] C_s P_s^\epsilon (1 - \tau)^{-1} P_t^*(i)^{-\epsilon} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Gleichung wird mit $(1 - \tau)P_t^*(i)^\epsilon$ multipliziert und nach $P_t^*(i)$ aufgelöst:

$$P_t^*(i) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \frac{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} MC_s C_s P_s^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} C_s P_s^\epsilon}. \quad (9)$$

Da die rechte Seite der Gleichung nicht von unternehmensspezifischen Variablen abhängt, ist der optimale Preis für alle Unternehmen identisch, die zum Zeitpunkt t ihren Preis anpassen können, d.h.

$$P_t^* = P_t^*(i) \quad \forall i. \quad (10)$$

Lösung zu 3:

Der logarithmierte, gewinnmaximale Preis ist

$$p_t^*(i) = \underbrace{\ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\right)}_{\mu} + \ln\left(\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} MC_s C_s P_s^\epsilon\right) - \ln\left(\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} C_s P_s^\epsilon\right), \quad (11)$$

wobei Kleinbuchstaben für logarithmierte Variablen stehen, z.B. $\ln P_t^*(i) = p_t^*(i)$.

Als Bezugspunkt wählen wir das Gleichgewicht GG bei flexiblen Preisen $\bar{p}^*(i)$, $\bar{m}\bar{c}$, \bar{c} und \bar{p} . Für den gleichgewichtigen Preis gilt

$$\begin{aligned} \bar{p}^*(i) &= \mu + \ln\left(\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} \bar{M}\bar{C} \bar{C} \bar{P}^\epsilon\right) - \ln\left(\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} \bar{C} \bar{P}^\epsilon\right) \\ &= \mu + \ln\left(\bar{M}\bar{C} \bar{C} \bar{P}^\epsilon \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}\right) - \ln\left(\bar{C} \bar{P}^\epsilon \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \mu + \bar{m}\bar{c} + \ln\left(\bar{C} \bar{P}^\epsilon \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}\right) - \ln\left(\bar{C} \bar{P}^\epsilon \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}\right) \quad (13)$$

$$= \mu + \bar{m}\bar{c}, \quad (14)$$

was sich auch aus Gleichung (1.42) des Skripts herleiten lässt.

Eine Taylorapproximation wird bezüglich aller Variablen $z_s = (mc_s, c_s, p_s)$, $s = t, \dots, \infty$, vorgenommen. Dabei werden die ersten Ableitungen mit den Werten des Gleichgewichts GG ausgewertet:

$$p_t^*(i) \approx \bar{p}^*(i) + \sum_{j=t}^{\infty} \left[\frac{\partial p_t^*(i)}{\partial mc_j} \Big|_{\text{GG}} (mc_j - \bar{m}\bar{c}) + \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial c_j} \Big|_{\text{GG}} (c_j - \bar{c}) + \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial p_j} \Big|_{\text{GG}} (p_j - \bar{p}) \right].$$

Die ersten Ableitungen lassen sich stark vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial mc_j} \Big|_{\text{GG}} &= \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial MC_j} \frac{\partial MC_j}{\partial mc_j} \Big|_{\text{GG}} = \frac{(\beta\theta)^{j-t} MC_j C_j P_j^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} MC_s C_s P_s^\epsilon} \Big|_{\text{GG}} \\ &= \frac{(\beta\theta)^{j-t} \bar{M}\bar{C} \bar{C} \bar{P}^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} \bar{M}\bar{C} \bar{C} \bar{P}^\epsilon} = \frac{(\beta\theta)^{j-t}}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}} = (1-\beta\theta)(\beta\theta)^{j-t} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial p_j} \Big|_{\text{GG}} &= \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_j} \Big|_{\text{GG}} = \frac{(\beta\theta)^{j-t} MC_j C_j P_j^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} MC_s C_s P_s^\epsilon} \Big|_{\text{GG}} - \frac{(\beta\theta)^{j-t} C_j P_j^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} C_s P_s^\epsilon} \Big|_{\text{GG}} \\ &= \frac{(\beta\theta)^{j-t}}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}} - \frac{(\beta\theta)^{j-t}}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial p_t^*(i)}{\partial c_j} \Big|_{\text{GG}} = \frac{\partial p_t^*(i)}{\partial C_j} \frac{\partial C_j}{\partial c_j} \Big|_{\text{GG}} = \epsilon \frac{(\beta\theta)^{j-t} MC_j C_j P_j^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} MC_s C_s P_s^\epsilon} \Big|_{\text{GG}} - \epsilon \frac{(\beta\theta)^{j-t} C_j P_j^\epsilon}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} C_s P_s^\epsilon} \Big|_{\text{GG}}$$

$$= \frac{(\beta\theta)^{j-t}}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}} - \frac{(\beta\theta)^{j-t}}{\sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t}} = 0 \quad (17)$$

Eingesetzt in die Taylorapproximation ergibt dies

$$\begin{aligned} p_t^*(i) &\approx \bar{p}^*(i) + \sum_{j=t}^{\infty} \left[(1 - \beta\theta)(\beta\theta)^{j-t} (mc_j - \overline{mc}) + 0 \cdot (c_j - \bar{c}) + 0 \cdot (p_j - \bar{p}) \right] \\ &\approx \mu + \overline{mc} + (1 - \beta\theta) \sum_{j=t}^{\infty} (\beta\theta)^{j-t} mc_j - \overline{mc} (1 - \beta\theta) \sum_{j=t}^{\infty} (\beta\theta)^{j-t} \end{aligned}$$

und wegen $\sum_{j=t}^{\infty} (\beta\theta)^{j-t} = (1 - \beta\theta)^{-1}$:

$$p_t^*(i) \approx \mu + (1 - \beta\theta) \sum_{j=t}^{\infty} (\beta\theta)^{j-t} mc_j.$$

Lösung zu 4:

Ausgangspunkt sind die Gleichungen

$$p_t = \theta p_{t-1} + (1 - \theta)p_t^* \quad (18)$$

und

$$p_t^* \approx \mu + (1 - \beta\theta) \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} mc_s. \quad (19)$$

Mit ihrer Hilfe kann die unbeobachtbare Größe p_t^* eliminiert werden. Dies geschieht in zwei Schritten.

Schritt 1. Zunächst wird die unendliche Summe in (19) eine Differenzgleichung umgeformt. (Hinweis: eine einfache Differenzgleichung erster Ordnung kann immer durch Vorwärts- oder Rückwärtslösung in eine unendliche Summe überführt werden.) Dies geschieht im vorliegenden Fall durch geschickte Subtraktion einer zweiten unendlichen Summe. Dazu schreiben wir den Ausdruck zunächst als:

$$p_t^* \approx \mu + (1 - \beta\theta) \sum_{s=t}^{\infty} (\beta\theta)^{s-t} mc_s \quad (20)$$

$$\approx \mu + (1 - \beta\theta) \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j}. \quad (21)$$

Dann betrachten wir den um eine Periode in die Zukunft verschobenen und mit $\beta\theta$ multiplizierten Preis:

$$\beta\theta p_{t+1}^* \approx \beta\theta\mu + \beta\theta(1 - \beta\theta) \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j+1} \quad (22)$$

$$\approx \beta\theta\mu + (1 - \beta\theta) \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\theta)^{j+1} mc_{t+j+1} \quad (23)$$

$$\approx \beta\theta\mu + (1 - \beta\theta) \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j} \quad (24)$$

Nun subtrahieren wir (24) von (21) und erhalten:

$$\begin{aligned} p_t^* - \beta\theta p_{t+1}^* &\approx (1 - \beta\theta)\mu + (1 - \beta\theta) \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j} - (1 - \beta\theta) \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j} \\ &\approx (1 - \beta\theta)\mu + (1 - \beta\theta)(\beta\theta)^0 mc_t + (1 - \beta\theta) \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j} - (1 - \beta\theta) \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\theta)^j mc_{t+j} \\ &\approx (1 - \beta\theta)\mu + (1 - \beta\theta)mc_t \end{aligned} \quad (25)$$

Um weitere mühsame Umformungen abzukürzen, verwenden wir den Lagoperator für $p_{t+1}^* = L^{-1}p_t^*$. Dann können wir die obige Gleichung wie folgt schreiben:

$$(1 - \beta\theta L^{-1})p_t^* \approx (1 - \beta\theta)\mu + (1 - \beta\theta)mc_t \quad (26)$$

$$p_t^* \approx (1 - \beta\theta L^{-1})^{-1}(1 - \beta\theta)\mu + (1 - \beta\theta L^{-1})^{-1}(1 - \beta\theta)mc_t. \quad (27)$$

Der Ausdruck $(1 - \beta\theta L^{-1})^{-1}(1 - \beta\theta)\mu$ kann erheblich vereinfacht werden, wenn man bedenkt, dass keine zeitvariierende Größe enthalten ist. Dann kann der Lagoperator weggelassen werden, so dass sich $(1 - \beta\theta)^{-1}(1 - \beta\theta)\mu = \mu$ ergibt. Einsetzen ergibt die Preissetzungregel:

$$p_t^* \approx \mu + (1 - \beta\theta L^{-1})^{-1}(1 - \beta\theta)mc_t. \quad (28)$$

Diese wird in (18) eingesetzt wird:

$$p_t = \theta p_{t-1} + (1 - \theta)\mu + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(1 - \beta\theta L^{-1})^{-1}mc_t. \quad (29)$$

Diese Gleichung wird mit $(1 - \beta\theta L^{-1})$ multipliziert:

$$\begin{aligned} (1 - \beta\theta L^{-1})p_t &= \theta(1 - \beta\theta L^{-1})p_{t-1} + (1 - \theta)(1 - \beta\theta L^{-1})\mu + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t \\ p_t - \beta\theta p_{t+1} &= \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)\mu + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)mc_t. \end{aligned} \quad (30)$$

Nun ersetzen wir mc_t durch $mc_t^r + p_t$ und erhalten

$$\begin{aligned} p_t - \beta\theta p_{t+1} &= \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(mc_t^r + \mu) + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)p_t \\ p_t - \beta\theta p_{t+1} &= \theta p_{t-1} - \beta\theta^2 p_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(mc_t^r + \mu) + (1 - \theta - \beta\theta + \beta\theta^2)p_t \\ -\beta\theta p_{t+1} &= \theta p_{t-1} + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(mc_t^r + \mu) + (-\theta - \beta\theta)p_t \\ -\beta\theta p_{t+1} + \beta\theta p_t &= -\theta p_t + \theta p_{t-1} + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(mc_t^r + \mu) \\ -\beta\theta \pi_{t+1} &= -\theta \pi_t + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)(mc_t^r + \mu) \\ \pi_t &= \beta \pi_{t+1} + (1 - \theta)(1 - \beta\theta)\theta^{-1}(mc_t^r + \mu). \end{aligned} \quad (31)$$

Wegen $\overline{mc}^r = -\mu$ gilt $mc_t^r + \mu = \widehat{mc}^r$ und folglich

$$\pi_t = \beta \pi_{t+1} + \lambda \widehat{mc}^r \quad (32)$$

mit $\lambda = (1 - \theta)(1 - \beta\theta)\theta^{-1}$.