Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 - Cake eating model

Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem eines repräsentativen Haushalts:

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t) \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung:

$$c_t + a_t = Ra_{t-1} \tag{2}$$

wobei c den Konsum, a das „Vermögen", R den Zinssatz für das Vermögen und β die Zeitpräferenzrate bezeichnen. Nehmen Sie an, dass ein Anfangsvermögensbestand a_{-1} gegeben ist.

1. Benennen Sie die endogenen und exogenen Variablen im Zeitpunkt t Welche Variablen sind Zustandsvariablen (*state variables*)?
2. Erstellen Sie die Lagrangefunktion für die Lösung des Optimierungsproblems.
3. Leiten Sie die Optimalitätsbedingungen her.
4. Bestimmen Sie das langfristige Gleichgewicht (*steady state*).
5. Berechnen Sie die rekursiven Bewegungsgleichungen (*recursive law of motion*).

Aufgabe 2 – Stochastisches Neoklassisches Wachstumsmodell

Gegeben sei folgendes Maximierungskalkül eines repräsentativen Agenten

$$\max_{c_t, l_t} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) - \psi l_t \right] \tag{1}$$

wobei c den Konsum, l das Arbeitsangebot und k den Kapitalstock des Haushalts bezeichnen. Der Parameter β bezeichnet die Zeitpräferenzrate. Der Kapitalstock verringert sich in jeder Periode um die Abschreibungsrate δ. Kapital und Arbeit können in folgender Produktionsfunktion eingesetzt werden:

$$y_t = e^{z_t} k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{2}$$

Der Parameter z beschreibt den technologischen Fortschritt und folgt einem AR(1)-Prozess:

$$z_t = \rho z_{t-1} + e_t, \quad e \sim N(0, \sigma_e^2) \tag{3}$$

Das produzierte Gut kann entweder investiert oder konsumiert werden.

1. Benennen Sie die endogenen und exogenen Variablen im Zeitpunkt t. Bei welchen Variablen handelt es sich um Zustandsvariablen (*state variables*)?

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Angaben aus dem Text die Budgetrestriktion.

3. Stellen Sie mit Hilfe der Lagrangefunktion das Optimierungskalkül der Haushalte auf und berechnen Sie die ersten Ableitungen.

4. Ermitteln Sie den gleichgewichtigen Wachstumspfad (*steady state*).

5. Log-Linearisieren Sie die zentralen Modellgleichungen.

6. Berechnen Sie die rekursiven Bewegungsgleichungen (. Bestimmen Sie hierfür zunächst eine mögliche Bewegungsgleichung. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten *(method of undetermined coefficients).* für folgende Parameter:

   β = 0.987, δ = 0.012, α = 0.4, ρ = 0.95, θ = 1.

7. Berechnen Sie die Impuls-Antwort-Folgen für Kapital nach einem Technologieschock z. B. $e_0 = 1$ für t = 0,1,2,3 und zeichnen Sie diese.